Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Dělení se zbytkem jako diagnostický nástroj kognitivních schopností českých žáků

Division with remainders as a diagnostic tool for studying cognitive skills of Czech pupils

Jana Kotrbatá

Vedoucí diplomové práce:	Mgr. Jaroslava Kloboučková
Studijní program:	Učitelství pro základní školy (M7503)
Studijní obor:	I.ST (7503T047)

2015

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Dělení se zbytkem jako diagnostický nástroj kognitivních schopností českých žáků“ vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Praha, 26. 6. 2015

....

podpis

Poděkování

Děkuji Mgr. J. Kloboučkové za odborné vedení této práce, za cenné rady a věcné připomínky. Poděkování patří i mé rodině, která mě podporovala po celou dobu studia. V neposlední řadě děkuji i všem žákům, se kterými jsem mohla vést individuální rozhovory.

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá problematikou algoritmu dělení se zbytkem v souvislosti s rozvojem kognitivních schopností českých žáků. Vzhledem k obvyklému zařazení tohoto tematického celku (dělení se zbytkem) do 3. ročníku ZŠ jsou zde zpracovány teoreticky zaměřené kapitoly věnující se ontogenezi člověka se zřetelem k dítěti, jeho kognitivnímu vývoji a školnímu systému v České republice. Z pohledu tématu práce analyzuje vybrané ucelené řady učebnic pro 1. stupeň ZŠ, kde rozlišuje úlohy od propedeutických přes zavádění a aplikaci až po úlohy nestandardní. Práce zkoumá rozdílné a společné rysy v pojetí autorů analyzovaných učebnic. Jedním z kritérií je hodnocení přístupu k vyučování, a to na základě vyhledávání prvků konstruktivismu nebo transmise. Dalším cílem práce je zkoumání zvolených řešitelských strategií žáků u úloh zaměřených na dělení se zbytkem. Postupy řešení byly získány zadáním diagnostického testu žákům 1. stupně ZŠ.

KLÍČOVÁ SLOVA

dělení se zbytkem, dítě mladšího školního věku, kognitivní vývoj dítěte, styly výuky - transmise, konstruktivismus, algoritmus, řešitelské strategie

ABSTRACT

This thesis deals with the algorithm of division with a remainder in connection with the development of cognitive abilities of Czech pupils. Due to the usual inclusion of this thematic unit (division with a remainder) in the third year of primary school, theoretically focused chapters dedicated to human ontogenesis, with regard to the child's cognitive development and educational system in the Czech Republic, are incorporated. From the thematic perspective, the work analyzes selected comprehensive series of textbooks for first grade of primary school, differentiating the exercises from propaedeutic through an introduction and application to non-standard tasks. Thesis examines the commonalities and differences in the concept of the analyzed textbooks by various authors. One of the criteria is the evaluation of approach to teaching based on identifying elements of constructivism or transmission. Another objective of the work is a research of selected problem-solving strategies of students dealing with tasks comprising division with a remainder. Solution methods were obtained by assigning of diagnostic test to pupils of a first grade of primary school.

KEYWORDS

division with a remainder, a primary school aged child, cognitive development of a child, teaching styles – transmission, constructivism, algorithm, problem-solving strategies

Obsah

1 Úvod

Během studia na 1. stupni základní školy mě matematika vždy velmi bavila. Ráda jsem řešila různé úlohy a vždy jsem měla radost, když jsem dospěla ke správnému řešení. I při domácí přípravě na přijímací zkoušky na víceletá gymnázia patřila matematika k mým nejoblíbenějším předmětům. Dnes zpětně vidím, že to bylo dáno tím, že jsem probíraným operacím rozuměla nebo je měla naučené tak, že jsem byla v řešení úspěšná a uměla jsem bez problémů řešit nejrůznější slovní úlohy, včetně těch netradičních. Vypadalo to jako slibný předpoklad pro další vzdělávání. Na víceletém gymnáziu zhruba v období kvarty došlo ale k zásadnímu zlomu. V té době jsme na matematiku dostali novou vyučující a přestala jsem nové látce rozumět. Až do oktávy, ve snaze získat dobré hodnocení, jsem se učila veškeré postupy řešení zpaměti. Matematika se tedy rázem v oblíbenosti předmětů propadla až na opačný konec této škály. Nevěřila jsem, že by ještě někdy mohla nastat situace, kdy bych řekla, že mě matematika bude bavit.

S těmito pocity jsem šla na vysokou školu a hned v 1. ročníku jsem byla velmi překvapena pro mě netradičním způsobem výuky a přístupem. Během přednášek a cvičení nám byly předkládány různé výzvy, a čím více jsem jich zvládla vyřešit, tím více postupně rostlo mé matematické sebevědomí. Hledání způsobů řešení a vyřešení úloh mě začalo bavit. Z počátku jsem tento přístup k výuce brala jako vhodný pro nás budoucí učitele, kdy sami pro sebe učiníme nějaký objev v matematice. Trvalo mi ale asi 3 roky, než jsem byla ochotna vnitřně přijmout, že by tento přístup byl vhodný i pro výuku ve škole, kde budu jednou působit i já jako učitelka. Spousta příběhů i vlastních zkušeností, s výukou nejen matematiky, mě přesvědčily, že výuka tímto způsobem je obohacující nejen pro žáky, ale i pro učitele. I tento můj osobní poznatek byl jedním z důvodů k tomu, abych si vybrala téma své diplomové práce na katedře matematiky a didaktiky matematiky.

Pro diplomovou práci jsem si nakonec zvolila jedno z navržených témat, a to "Dělení se zbytkem jako diagnostický nástroj kognitivních schopností českých žáků". Zprvu jsem nevěřila tomu, že by bylo možné toto téma zpracovat v rozsahu diplomové práce. Sama jsem dělení se zbytkem znala pouze jako algoritmus a neviděla jsem za ním další matematické vztahy. Až při hlubším zkoumání této problematiky jsem zjistila, že různé strategie řešení mohou mít souvislost s kognitivním vývojem dítěte.

Cíle mé práce se dají formulovat ve třech bodech (uvedu je zde nejprve kurzívou a poté je upřesním):

a) *Prozkoumat alespoň dvě ucelené řady používaných učebnic z pohledu tematického celku Dělení se zbytkem.*

   Vybrat takové úlohy, které je možné považovat za propedeutické z pohledu výše uvedeného celku a zpracovat jejich možnosti zařazení do výuky. Stanovila jsem si, že se budu snažit vybrat veškeré úlohy, které se týkají dělení se zbytkem a propedeutiky dělení se zbytkem. Budu se jimi zabývat z pohledu přístupu k vyučování — konstruktivismu a transmise a projít v nich celou koncepci výuky dělení se zbytkem od propedeutických úloh přes zavedení dělení se zbytkem, procvičování, aplikaci až k úlohám nestandardním. Pokud to bude možné, budu hledat i další možnosti jak úlohy rozšířit pro další matematické využití jejich skrytého potenciálu. V této části chci vycházet ze zkušeností, které jsem získala při různých praxích na školách v průběhu studia a při vlastním učení se matematiky.

b) Zjistit, zda žáci „umí“ dělit se zbytkem.

   Pod pojmem umět provádět nějakou početní operaci si každý z učitelů představí něco jiného. Já se budu ve své práci snažit zjistit, jak žáci rozumí úlohám, kde je nutno získat neúplný podíl jako výsledek. K tomu jsem použila diagnostický test z projektu „Kritická místa“. Formou testu a individuálního rozhovoru jsem zkoumala jednotlivé strategie řešení žáků a kladením otázek jsem zjišťovala, zda a jak předkládané problematice rozumí.

c) Hlouběji porozumět matematické operaci Dělení se zbytkem nejen jako jednoduchému algoritmu, ale jako součásti určité struktury.

   Hlouběji porozumět operaci dělení se zbytkem z pohledu mě jako budoucího učitele. Prostudování odborné literatury a následné zkoumání jednotlivých úloh a postupů řešení mi jistě poskytne celou řadu možností, na co se při dělení se zbytkem může učitel zaměřovat a jak by mohl problematiku dělení se zbytkem do výuky zařazovat.

2 Dítě mladšího školního věku v českém systému vzdělávání

Pro téma diplomové práce je stěžejní ontogenetické období dítěte mladšího školního věku, protože dělení se zbytkem se zavádí ve 3. ročníku základní školy. Bylo by chybné vytrhnout toto období z kontextu ontogeneze, proto je následující kapitola věnována celému vývoji dítěte školního věku.

2.1 Ontogenetický vývoj dítěte a jeho charakteristika

Vágnerová (2012) se věnuje ontogenezi v monografii Vývojová psychologie a vstup do školy je dle ní důležitým mezníkem v lidském životě. Chápe ho jako oficiální vstup do společnosti. Dítě musí potvrdit své předpoklady a schopnosti, pracovat a plnit dané povinnosti, které od něj škola očekává. Toto období lze charakterizovat pílí a snaživostí žáka. Dítě usiluje o splnění hlavního cíle, a to je uspět. Pro zvládnutí všech kladených nároků je potřeba osobnostního rozvoje a potvrzení kvalit i ve vztahu k okolí jak k dospělým, tak i mezi spolužáky, kde se postupně včleňuje do vrstevnické skupiny, která má specifický řád a vlastní pravidla. Dítě se učí uspět v obou sociálních oblastech.

Školní věk je vymezen povinnou školní docházkou a Vágnerová (2012) ho dělí do tří fází: raný, střední a starší školní věk.

- Raný školní věk (6–9 let): pro dítě je v tomto období klíčové zvládnutí nové sociální role a získání základů vzdělanosti (čtení, psaní, počítání), které bude dále rozvíjet.
- Střední školní věk (9–11, 12 let): toto období končí završením 5. ročníku, tedy přechodem na 2. stupeň základní školy. Během něj dochází k méně nápadným změnám, proto je toto období označováno dle Matějčka (in Vágnerová, 2012) obdobím vyrovnané konsolidace. Dítě si v něm připravuje své budoucí sociální postavení. Důležitý je i vývoj v rámci vrstevnické skupiny, která má vliv pro další vývoj jeho osobnosti. Nastává plynulý rozvoj ve všech oblastech, což může dotvrzovat zájem dítěte o nové poznání i motivaci k učení. Tento proces může být narušován sociálními tlaky ze školy, rodiny nebo vrstevnické skupiny.
- Starší školní věk (12–15 let): lze ho datovat do ukončení povinné školní docházky. Převládá zde biologické hledisko, kdy žák vstupuje do období pubescence a to se projevuje změnou prožívání a uvažování na psychické úrovni. Dochází k postupnému osamostatňování se dítěte od rodiny.

2.2 Rozvoj počtářských dovedností v rámci ontogeneze

Vágnerová (2012) se věnuje i rozvoji počtářských dovedností. Postupně se zabývá porozuměním významu čísla, logickými řadami, principem rovnosti, sčítáním, odčítáním, přechodem přes desítku, násobením, dělením, matematickými schopnostmi a formulací slovních úloh. Dělení se zbytkem je obvykle zařazeno ve 3. ročníku a to má dle Vágnerové své opodstatnění. K tomu, aby dítě mohlo porozumět této matematické operaci, potřebuje mít dostatek zkušeností s významem čísla, musí zvládnout úlohy, kde se objevuje dělení po částech i na části a na základě těchto poznatků je potom schopno rozšířit dělení i o zbytek.

Na počátku školní docházky se žák setkává se dvěma faktory, které tvoří komplex početních dovedností. Jedná se o základní numerické schopnosti a konvenční aritmetické dovednosti.

V případě základních numerických schopností se jedná o práci s čísly - žák musí čísla znát, porozumět vztahům mezi nimi a provádět matematické operace. Konvenční aritmetické dovednosti se vztahují k řešení slovních úloh. Žákovi v tomto případě nestačí jen numerická dovednost. K úspěšnému vyřešení musí porozumět tomu, co které číslo ve slovní úloze znamená. Musí zvládnout převod slovní formulace do numerické podoby.

Konvenční aritmetické dovednosti charakterizují numerické porozumění vyššího stupně. K jejich rozvoji dochází během školní docházky. Dítě získává zkušenosti s řešením slovních úloh, učí se transformovat slovní vyjádření do numerického a naopak. Nesprávné řešení nemusí být nutně spojeno s numerickou chybou, ale svou roli zde může hrát i pouhé neporozumění textu, či nejednoznačně formulované zadání. V některých případech může být zadání slovní úlohy pro dítě složité, což může vést k tomu, že k výpočtu použije jen pár informací, kterým v danou chvíli rozumí, ve snaze úlohu vyřešit. U základních numerických schopností není taková míra závislosti na školní výuce, jejich rozvoj nastává díky zkušenostem z každodenního života. (Vágnerová, 2012)

3 Kognitivní vývoj dítěte

Poznávací procesy podle Koláře můžeme označit jako *„procesy, jejichž prostřednictvím člověk přijímá, hodnotí a zpracovává informace z vnějšího i vnitřního prostředí." (Kolář a kol., 2012, s. 104)* Poznávací procesy tvoří základ kognitivního poznávání. Jako psychologický proces se dělí do dvou složek, které nakonec tvoří složitý, ale jednotný systém. Těmito složkami jsou bezprostřední smyslové poznávání, kdy výsledkem procesu je názorný obraz skutečnosti a zprostředkované rozumové poznání, kdy zapojení myšlení a řeči vede k poznání skutečnosti na základě zobecněných či odvozených vzájemných vztahů mezi jevy.

Představy a obrazotvornost slouží jako přechod mezi těmito dvěma složkami. Zásadními kognitivními procesy jsou paměť a myšlení, které spolu s dalšími poznávacími procesy tvoří ucelený komplex. Pomocí poznávacích procesů poznává člověk sebe sama a okolní svět. Poznávací procesy jsou předmětem kognitivní psychologie a v Pedagogickém slovníku (2009) jsou k nim přiřazeny zejména vnímání, zapamatování, vybavování, představivost, myšlení, zpracování verbálních a neverbálních informací aj. Z pohledu pedagogiky jsou podstatné, protože tvoří základ učení a patří do intelektuálního vývoje jedince.

Helus (2009) přikládá velký význam právě kognitivní psychologii, která přináší podněty pro objevování dítěte, vnitřní zpracování informací, efektivní postupy učení, upevňování paměti a porozumění souvislostem při řešení problémů. Pro potřeby profese učitele je zejména zajímavé, jaké zvláštnosti jsou charakteristické pro poznávání dětí, jak se dětské poznání vyvíjí a co vývoji napomáhá. Tomuto vývoji se věnovali např. Piaget a Vygotskij, kteří jsou považováni za klasiky kognitivní psychologie.

V současné době se pozornost věnuje i tzv. osobnostnímu zakotvení poznávacích procesů. Vlastnosti osobnosti a její vybavenost mají vliv na poznávání. Poznatky kognitivní psychologie v dnešní době přispívají i ke snahám o zlepšení výsledků školního vyučování.

O kognitivní oblasti se píše v různých psychologických monografiích a encyklopediích či slovnících. Fontana (2003) zmiňuje, že výraz kognitivní se odvozuje z latinského „cognitio", v českém překladu poznání. Označuje tím tedy všechny duševní schopnosti, které souvisí s myšlením a poznáním. Tyto schopnosti spoluurčují výkonnost dětí v procesu učení, proto je na ně ve vzdělávání zaměřena zvláštní pozornost. *„Kognitivní schopnosti dětí zahrnují jejich zjišťovanou inteligenci, jejich úroveň myšlení, a dokonce* *v určité míře i jejich tvořivost a způsob, jak si vedou v interpersonálních vztazích.“ (Fontana, 2003, s. 63)*

3.1 Piagetovo pojetí

Piaget se věnoval výzkumu dětského myšlení. Fontana (2003) ve své monografii shrnuje některé důležité Piagetovy myšlenky a poznatky. Piaget navrhl vývojovou teorii, která vysvětluje, jak si děti postupně vytváří pojmy, které používají při myšlení, a tímto způsobem chápou svět kolem sebe. Na základě ontogeneze u dětí dochází k rozvoji vyšších forem myšlení a to ne náhodně, ale podle uspořádaného schématu a v daném časovém rozmezí. Dítě se v rámci vývoje naučí některé pojmy a dále je rozvíjí na základě dalšího poznání a hledání souvislostí. Pokud je nenajde, vytváří si pojmy nové. Mohou však nastat situace, kdy dojde k mylnému porozumění či zařazení nového pojmu, a dítě nedokáže s novou skutečností adekvátně zacházet. Fontana k této situaci uvádí příklad, kdy dítě roztrhá bankovku v domnění, že se jedná pouze o papír, ale ještě nechápe její hodnotu.

Kognitivní vývoj dítěte na základě ontogeneze má dle Piageta čtyři stadia, která jsou ohraničena přibližným věkem, avšak jsou zde i vnější faktory, které mohou ovlivnit individuální vývoj. Mezi tyto faktory řadíme prostředí, ve kterém dítě vyrůstá, sociální zázemí a množství podnětů, které mu jeho nejbližší okolí nabízí. I přes tyto skutečnosti je kognitivní vývoj biologicky determinován v čase.

3.1.1 Senzomotorické stadium (přibližně od narození do 2 let)

Po narození dítě reaguje pouze reflexivně, to znamená, že nevyužívá žádné uvědomělé myšlenkové operace, ale pouze reaguje na vnější podněty z okolí, např. dítě uchopí podávaný předmět nebo při leknutí reaguje pláčem. Vždy se však jedná o bezmyšlenkovité jednání. V prvních 4 měsících života jsou všechny činnosti dítěte zaměřeny pouze na vlastní tělo. Od 4 měsíců dítě začíná vnímat i vnější objekty, objevuje se prvek účelu v chování a dítě začíná uvědoměle užívat pohybů těla k dosažení konkrétních cílů. Piaget nazývá tyto sledy pohybů schématy a to jsou, dle jeho názoru, doklady o kognitivních strukturách. Dítě si tímto způsobem vytváří stabilní vzorce, které se ve věku 12-18 měsíců stávají složitějšími, a dítě je následně využívá k dosažení požadovaných cílů.

V senzomotorickém období dítě užívá poznaná schémata tzv. kruhovými reakcemi, které mají tři stadia. Jsou jimi primární kruhové reakce (v raném období reflexní činnosti), sekundární kruhové reakce (zahájení účelovější činnosti) a terciární kruhové reakce (účelová činnost se stává propracovanější).

Piaget pojem kruhové reakce vysvětluje tím, že dítě nepřemýšlí nad vykonáním určitého činu, ale jen jej vykoná. Tyto činy jsou zjevné a mají tělesnou povahu. Až později má dítě schopnost dané činy zvnitřnit, přemýšlí a vědomě se rozhoduje o jejich vykonání a poznává, co je pro něj výhodnější. Během prvních 18 měsíců života si dítě nedokáže uvědomit, že existují objekty i mimo dosah jeho smyslového vnímání. K objevu dochází před dovršením dvou let života. (Fontana, 2003)

3.1.2 Předoperační myšlení (přibližně 2-7 let)

Toto stadium Piaget dále dělí na dvě substadia, a to předpojmové a intuitivní. (Fontana, 2003)

Předpojmové substadium (2-4 let): v tomto období se stále více prosazuje symbolická činnost. Děti dokáží používat symboly k označování činů, a díky tomu si je mohou představit, aniž by je opravdu vykonávaly. Projevuje se to například v dětských hrách, kdy jsou lidé zastupováni panenkami, skutečné objekty jsou nahrazovány modely a děti jsou při nich samy v roli rodičů. Dochází také k rozvoji řeči a osvojování „znaků" - podle Piageta zvuků, které nemají zvláštní vnější vztah k předmětům a událostem a zastupují je. Piaget rozlišuje symboly a znaky. Dítě užívá symboly dříve než znaky a není dosud schopné tvořit pojmy stejným způsobem jako starší děti. Proto nazývá toto období předpojmové.

Intuitivní substadium (4-7 let): toto období bylo nejvíce zkoumáno, protože již zasahuje do věku dítěte, ve kterém vstupuje do školy. Piaget vypisuje tři kognitivní struktury, které dítě používá: egocentrismus, centraci a ireverzibilitu.

V egocentrismu dítě dosud není schopno vidět svět z jiného než sebestředného hlediska. Není to dáno sobectvím, ale jeho myšlení není dosud kritické, logické a realistické. Vidí tedy svět pouze subjektivně. Fontana (2003) to dokazuje na příkladu, když má dítě vyjmenovat bratry a sestry svého sourozence z vlastní rodiny, tak sebe ve výčtu vynechá.

V centraci dítě při posuzování upne svou pozornost pouze na jeden znak a ostatní nebere na vědomí, přestože jsou při posouzení situace důležité. Fontana (2003) uvádí řadu experimentů, které byly v této souvislosti provedeny, a ukazuje na nich neschopnost dětí v tomto stadiu uplatnit to, co Piaget nazval konzervací (zachováním). Dokládá to na příkladu, kdy jsou před dítě umístěny dvě totožné řady bonbónů. Před zrakem dítěte v jedné řadě zvětšíme mezery, jednoduše řečeno, tuto řadu roztáhneme. Dítě na dotaz, ve které řadě je více bonbónů, odpovědí potvrdí non-konzervaci tím, že označí delší řadu jako tu, ve které je více bonbónů.

Ireverzibilita je neschopnost zpětně postupovat k výchozímu bodu. Dítě je schopno dělat postupně řadu úkonů, ale ještě je pro něj problém se vrátit k předchozím krokům. Tato schopnost je velmi důležitá v matematice. Fontana (2003) ji demonstruje na početním úkonu, kdy je dítě schopno sečíst jednoduchou úlohu, ve které zná dva sčítance, konkrétně 2 a 3. Dítě zvládne najít součet 5, ale ještě nedokáže tento postup obrátit a v tomto případě využít operaci odčítání, kdy 5 – 2 = 3. Kdyby mu však byla zadána přímo úloha, aby odečetlo od 5 číslo 2, bylo by toho schopno. Nedokáže zatím pochopit, že když 2 + 3 = 5, tak 5 – 2 = 3.

3.1.3 Konkrétní operace (přibližně 7-11 let)

Toto stadium spadá do období mladšího školního věku a zároveň je velmi důležité pro pochopení problematiky, kterou se zabývám v diplomové práci. V této době se děti postupně setkávají s úlohami, které je nejprve připravují k dělení se zbytkem. Následně dochází k zavedení dělení se zbytkem. Děti si v tomto stadiu postupně uspořádávají poznatky, získávají soudržnou symbolickou soustavu myšlení, a to jim nakonec umožňuje předvídat události a ovládat své okolí. Stále je zde však potřeba konkrétních zkušeností. Děti jsou schopny formulovat hypotézy při absenci názorných předloh. Zvládnou udělat 1—2 kroky, které jsou nad rámec konkrétních operací. Pokud to ale mají zvládnout, musí mít zkušenost z minulosti. Stále u nich převládá tendence spíše své okolí popisovat než vysvětlovat. To znamená, že je pro ně jednodušší dát příklad nějakého jevu než ho definovat.

Dětské myšlení se v tomto období vyvíjí tak, že se stává méně egocentrickým, decentruje se a projevuje se i schopnost zpětného postupu u sledu kroků. Dalším důležitým pokrokem je schopnost grupování neboli seskupování. Tato dovednost by měla být rozvíjena právě i v matematice, kdy si žák všímá různých podobných vlastností a je schopen dané objekty nebo čísla seskupovat podle různých kritérií.

Hledání společných znaků by mělo být rozvíjeno právě na 1. stupni, aby na základě toho mohl žák objevovat a později i formulovat poznatky. Díky grupování mohou žáci vysvětlovat vlastní zkušenosti, řešit problémy a zpřesňovat si obraz o světě. V tomto vývojovém stadiu se dále rozvíjí schopnost řazení podle kritérií. Jak grupování, tak řazení napomáhají ke správnému vnímání vztahu mezi předměty a k řešení problémů. (Fontana, 2003)

Někteří autoři učebnic si jsou vědomi důležitosti těchto aspektů a záměrně zařazují úlohy, které žáky vybízí k těmto činnostem. Postupně gradují úroveň jednotlivých úloh, aby odpovídaly vývoji kognitivních schopností žáků v tomto mladším školním věku.

Helus (2009) zmiňuje v rámci stadia konkrétních operací dle Piagetova dělení důležitost manipulace s předměty a ději nejprve v realitě a později v mysli. Ovšem stále se nejedná o operace s abstrakty. Vidí jako nezbytné věnovat dostatek prostoru pro individuální potřeby jednotlivých žáků v rámci manipulace, protože v tomto období dítě vychází právě z vlastních vybudovaných schémat, která pro něj mají konkrétní podobu. Díky tomu může řešit dané úlohy po svém a rozumí jim. Žáci udělají pokrok oproti předchozímu stadiu i ve schopnosti konzervovat v realitě i v mysli velikost, množství nebo objem. Na základě provedených experimentů a následných vyhodnocení se dítě nenechá zmást, jak tomu bylo dříve v příkladu s řadami se stejným počtem bonbónů, ale v různých vzdálenostech.

3.1.4 Formální operace (přibližně od 12 let)

Toto stadium Piaget spojuje s počátkem dospívání a nástupem závěrečného stadia kognitivního vývoje. Myšlení dítěte se stále ještě může lišit od myšlení dospělého, ale vývojově spěje k jeho podobě. Objevuje se schopnost formulovat hypotézu bez konkrétní zkušenosti. Děti jsou si daleko více vědomy souvislostí, které dříve nebyly schopny propojit, a získávají nadhled. V myšlení se projevuje mřížově - grupová struktura, která umožňuje cokoli vztáhnout k čemukoli jinému. To umožňuje vyzkoušet různé kombinace hypotetických výroků. To je základem hypoteticko-deduktivního usuzování, které pomáhá rozvíjet pochopení předmětu zájmu.

Kromě výše zmíněných struktur, ke kterým žák dospěje v rámci ontogeneze, má ještě vrozené dispozice, které zůstávají po celý život stejné. Nejznámější z nich jsou akomodace (přizpůsobení chování skutečnostem, které nelze měnit), asimilace (pojímání vlastností do existujících kognitivních struktur) a organizace (sdružování kognitivních aktů do sledů či schémat). (Fontana, 2003)

3.2 Kritiky Piagetova pojetí

Fontana (2003) zmiňuje i některé kritiky, které se vztahují k Piagetovu pojetí kognitivního vývoje. Některé z nich reagují na podceňování schopností malých dětí. Jeho vyvozené závěry jsou možná ovlivněny formou testování, které Piaget zvolil. V těchto testech neeliminoval faktory jako nezralost řeči, neschopnost rozlišit podstatné informace od nepodstatných, selhání paměti či nesrozumitelnou formulaci experimentátorových otázek.

To se promítlo ve výsledcích testů, přičemž neúspěšnost přiřazoval kognitivní nezralosti. Zároveň je zde kritika věkového ohraničení stadií a upozornění na to, že některá tvrzení nelze brát jako obecně platná úplně pro všechny. Další experimenty prokázaly, že některé děti, které spadaly do předoperačního stadia, se zachovaly v určité situaci neegocentricky. Co se týče oblasti formálního myšlení, Piaget naopak vývoj přecenil, když toto stadium klasifikoval od 12 let. Dnes se psychologové shodují na tom, že se formálního myšlení dosahuje až v 16 letech nebo později. Někteří lidé této úrovně patrně nemusí dosáhnout nikdy.

I přes veškerou kritiku nelze Piagetovi upřít jeho velkou snahu a průkopnickou činnost, kdy se snažil vstoupit do dětského světa a systematicky mu porozumět právě z pohledu dítěte. I když se objevují výhrady proti některým jeho tvrzením, není možné mu odepřít, že položil základní kámen v bádání o kognitivním vývoji dítěte. Na základě jeho domněnek a soudů později další psychologové pokračovali ve zkoumání této problematiky a jednotlivé myšlenky zdokonalovali. Důležitý je Piagetův poznatek, *„že dětské chápání je podmíněno schopností dítěte tvořit pojmy a vytvářet vnitřní model, který se postupně blíží vnější skutečnosti.“ (Fontana, 2003, s. 74)*

3.3 Brunerův přístup ke kognitivnímu vývoji

Bruner (in Fontana, 2003) dělí kognitivní vývoj do tří fází: akční, kde je myšlení založeno na konání; ikonické, v níž se stále více používá představivost a symbolické, při níž se uplatňuje složitá symbolizace včetně řeči.

Fontana (2003) zmiňuje, že toto dělení odpovídá stadiím podle Piageta, ale zásadně se liší tím, že každá etapa nekončí příchodem další, ale všechny si člověk uchovává po celý život, takže definitivně neopouštíme dřívější fáze, jak se domníval Piaget, ale uchováváme je a využíváme je. Na základě posouzení dané situace lze volit i užití akční, či ikonické fáze, pokud je to vhodné a účelné.

4 Školní systém v České republice

Pro lepší pochopení současného školního systému je potřeba znát i jeho vývoj a vycházet ze zkušeností dané doby. Dnes víme, že některé atributy školního systému z minulosti jsou již překonány, ale ne všechny změny lze učinit naráz. Je potřeba věci měnit postupně a s citem a ohledem k hodnotám, které jsou zatím ještě uznávány.

Následující kapitola je věnována školnímu systému v České republice z historického pohledu, dále kurikulárním dokumentům, učebnicím a různým typům škol. Do této kapitoly dále zařazuji kognitivní vývoj dítěte a vliv školy na jeho adekvátní rozvoj.

4.1 Historie školství v České republice

Novodobější historii školství v České republice se podrobně věnuje Spilková (2005). Popisuje situaci po roce 1989. V této době se začalo mluvit o vnitřní reformě školy a proměně obsahu vzdělávání. V roce 1990 byl umožněn vznik soukromých a církevních škol, ve kterých vznikl určitý prostor pro tvorbu vlastních vzdělávacích programů. Od školního roku 1991/1992 vešly v platnost nové učební osnovy, se kterými přišlo uvolnění původně striktní závaznosti učebního plánu a osnov a to i v jisté míře deideologizace. Toto uvolnění přineslo určitou možnost autonomie učitele a používání nových metod a forem práce. Otevřel se prostor pro tvorbu nových učebnic, na kterých se podíleli přímo učitelé z praxe. Hojně se mluvilo o cílech a pojetích primárního vzdělávání. Učitelé si kladli otázky, v čem by mělo být těžiště primární školy, čemu by měla škola žáky vychovávat a vzdělávat, jaké priority si zvolit ve vzdělávání. Výsledkem tohoto uvažování byly programy a projekty, např. Obecná škola 1993/1994, Živá škola, Reálná škola apod.

Roku 1995 byl zveřejněn Standard základního vzdělávání. Vyjadřoval představu společensky žádoucí podoby povinného základního vzdělávání. Tento dokument přinesl nové tendence, zejména větší prostor pro autonomii škol, aby se vytvořily příznivé podmínky pro vnitřní reformu školy. I přes snahy přistupovat k předávání poznatků jiným způsobem, přetrvávalo tradiční pojetí vyučování, proto se dá říci, že cíle, které si Standard základního vzdělávání kladl, se ne zcela naplnily. Na Standard základního vzdělávání navazovaly v letech 1996–1997 vzdělávací programy pro základní vzdělávání: Obecná škola, Základní škola a Národní škola. Díky tomu byly zrušeny dosavadní učební osnovy a učební plán.

Velkým zlomem v procesu transformace českého školství byl vznik Národního programu rozvoje vzdělávání - Bílé knihy, kde byl představen ucelený koncept rozvoje vzdělávání v České republice pro období 5-10 let. Tento dokument vychází ze zkušeností a poznatků z dosavadního procesu transformace a využívá pozitivní aspekty z minulých let. Národní program rozvoje vzdělávání se stal základním podkladem při vytváření nového školského zákona přijatého roku 2004. Bílá kniha se věnuje klíčovým otázkám vzdělávání. Zaměřuje se na pojetí, roli a funkci školy, cíle a obsahy vzdělávání, struktury systému školy, hodnocení kvality škol, roli učitele a jeho klíčové kompetence, vzdělávání a další profesní rozvoj. Jsou zde podporovány metody a formy práce, které vedou ke kooperativnímu učení, kritickému myšlení, projektové výuce a v neposlední řadě spolupráci učitelů.

Na tento dokument navazuje Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV). *„Jde zejména o změnu v hierarchii cílů vzdělávání – na místo tradiční triády vědomostí, dovedností, návyky s důrazem na paměťové osvojování velkého množství poznatků v hotové podobě, má nyní jít o všestrannou kultivaci dětské osobnosti, o celistvý* rozvoj *v oblasti kognitivní (nejen získávání poznatků, ale také/především získávání nástrojů pro poznávání, rozvoj myšlenkových operací, zejména vyšších úrovní myšlení), v* oblasti *kompetencí, postojů a hodnot." (Spilková, 2005, s. 22-23)* RVP ZV stojí na „čtyřech základních cílech vzdělávání": učit se poznávat, učit se jednat, učit se žít společně, učit se být. (Spilková in Průcha, 2009) Přijetím RVP ZV roku 2005 si na základě očekávaných výstupů školy samy vytváří školní vzdělávací program. Tím je dán větší prostor pro realizaci vize jednotlivých škol. Učitelé tak spolupracují a snaží se rozvíjet klíčové kompetence žáků a podporovat mezipředmětové vztahy. Tento dokument se stal i přes všechnu kritiku důležitým mezníkem v transformaci vzdělávání v České republice.

V dnešní době hraje důležitou roli i komparativní pedagogika, která se zabývá mj. srovnáváním systémů vzdělávání v jednotlivých zemích. Je zde snaha inspirovat se od fungujících systémů v zahraničí a aplikovat možné inovace i u nás. Velkou pomocí jsou v tom výměnné pobyty studentů i mezinárodní konference pro pedagogické pracovníky. Nelze však spoléhat na pouhé okopírování vzdělávacích programů jiných zemí, je potřeba myslet na historický kontext a specifika naší země.

4.2 Rámcový vzdělávací program (kurikulární dokumenty)

Termín kurikulum se v moderní pedagogice často používá v souvislosti s obsahem vzdělávání a učebním plánem. V Pedagogické encyklopedii Maňák a Janík (2009) odvozují kurikulum z latiny curro, -ere - běžet; curriculum - běh. V dnešní době vyjadřuje souhrn jevů, které se týkají obsahu vzdělávání. Tento pojem je obtížné jednoznačně definovat, protože se uvádí více než sto interpretací, které jsou ovlivněny různými koncepcemi, přístupy a východisky autorů. Průcha v Moderní pedagogice (2005) předkládá vymezení, ve kterém kurikulum chápe jako obsah vzdělávání zahrnující veškeré zkušenosti, které žáci nabývají ve škole a v činnostech se školou souvisejících — jejich plánování, zprostředkování a zhodnocení. Jedná se o širší pojetí, které směřuje k naplnění vzdělávacího cíle. Maňák a Janík (in Průcha, 2009) spatřují realizaci teoretické koncepce kurikula ve vzdělávacích programech a dokumentech. Mezi nejdůležitější z nich řadí učební plány, osnovy, učebnice, didaktické testy, standardy vzdělávání, metodické příručky, soubory pomůcek aj. Hlavní vzdělávací dokumenty jsou zajišťovány a kontrolovány státními orgány. Nejvyšším vzdělávacím dokumentem je školský zákon, od kterého jsou potom odvozeny nařízení, směrnice a další opatření.

První školský zákon v našich zemích byl vydán roku 1774 za vlády Marie Terezie. (Kasper, Kasperová, 2008) V této době se obsah vzdělávání týkal pouze základní gramotnosti, a to čtení, psaní, počítání a náboženství. Později se přidávaly další vyučovací předměty, které měly zejména pracovní charakter. Od té doby byly schváleny různé školské zákony, které odrážely vývoj společnosti, ale nelze říct, že by vždy měly progresivní tendence. Současná podoba školství vychází ze školského zákona č. 561/2004 Sb., který zavedl novou soustavu vzdělávacích programů a školám dal pravomoc vytvářet vlastní školní vzdělávací programy. Součástí bylo i schválení RVP ZV.

RVP ZV vznikal v letech 2001–2004. Další dva roky byl pilotně ověřován. Závazným pro všechny školy se stal 1. 9. 2007. Obsahem RVP jsou širší vzdělávací oblasti a kromě nich průřezová témata, která nelze jednoznačně přiřadit k jednotlivým vyučovacím předmětům a slouží k integraci.

Důležitou oblastí RVP ZV jsou cíle a očekávané výstupy, které jsou rozděleny na prvním stupni do dvou období: 1.-3. ročník a 4.-5. ročník. Pro toto věkové období je zpracováno šest klíčových kompetencí: kompetence k učení, komunikativní, k řešení problémů, sociální a personální, občanské, pracovní. Každá z těchto kompetencí je ještě rozpracována. Výstupy na konci 3. ročníku jsou považovány za orientační, na konci 5. ročníku jsou již závazné. Pro každou vzdělávací oblast jsou klíčové kompetence rozpracovány pomocí očekávaných výstupů ve tvaru z pohledu žáka s aktivním slovesem.

Cesta k dosažení nově očekávaných cílů vede přes určité metody a formy výuky. Bylo potřeba změnit dosavadní způsob výuky, aby bylo možno požadovaných cílů dosáhnout.

Nastal obrat k dítěti, respekt k žákovi a byl zaveden princip individualizace. Dále zde byl požadavek na zlepšení kvality komunikace, a to mezi učitelem a žákem, učitelem a rodiči a mezi učiteli navzájem - ve smyslu spolupráce, sdílení zkušeností a vytváření společných aktivit v rámci školy. Měnily se i přístupy k učení, kdy se do popředí dostávaly konstruktivistické a kooperativní metody a velkou otázkou byl způsob hodnocení žáků. Kurikulární reforma přinesla zpočátku i řadu problémů, protože někteří učitelé ji vnímali jako radikální zásah a nebyli na ni dostatečně připraveni. Pro někoho byl rámec výstupů příliš volný a požadoval jejich větší konkrétnost. Na druhou stranu řada škol si autonomii pochvalovala.

V průběhu času se cíle měnily. Byly ovlivňovány představou, jak má být člověk vychován, vzdělán v dané době. Na přednášce předmětu Didaktika 1. stupně ZŠ jsem byla seznámena s příklady cílů v historickém kontextu. Podle Spilkové se v antice jednalo o ideál krásy kalokagathia, ve středověku byly cíle dány podle společenské vrstvy, v renesanci dochází k návratu k antice, u Komenského se jednalo o triádu: vzdělanost, mravnost, zbožnost, v období budování socialismu byly cíle ideologizovány. V současnosti dochází k proměně v oblasti cílů, je kladen důraz na osobnostní rozvoj žáka.

Obsah primárního vzdělávání je rozdělen do vzdělávacích oblastí, pod které spadají vzdělávací obory. Díky tomu existuje možnost integrace a interdisciplinarity jednotlivých vyučovacích předmětů. Spilková (in Průcha, 2009) považuje primární vzdělávání za důležitý moment v celoživotním vzdělávání člověka. Základním cílem má být mnohostranný a vyvážený rozvoj dětské osobnosti.

4.3 Učebnice

Průcha (2009) z historického hlediska chápe učebnice jako jeden z nejstarších materiálních prostředků sloužících ke vzdělávání. Zmiňuje již starověké kultury Asyřanů, Egypťanů a Řeků, které vytvářely texty instruktivního typu. Nejprve byly texty přepisovány ručně, velký rozvoj nastal v 15. století po vynálezu knihtisku a od té doby se učebnice používají jako základní didaktická pomůcka. Dokonce i v dnešní době rozšířených informačních technologií mají tištěné učebnice ve školách své místo a překvapivě nadále vzrůstá jejich rozmanitost a počet. Jsou používány ve všech úrovních vzdělávání. Učebnice jsou nedílnou součástí kurikula, kdy prezentují určitou část plánovaného obsahu vzdělávání.

Struktura učebnic by se dala stručně shrnout do dvou složek, a to verbální a obrazové. Každá z těchto složek se skládá ještě z dalších komponentů, které určují jejich kvalitu. Tyto komponenty lze klasifikovat do tří kategorií podle toho, jakou funkci plní. Jedná se o aparát prezentace učiva obsahující např. výkladový test, shrnutí učiva, schémata; dále aparát řízení učiva, ve kterém jsou otázky a úkoly k tématům, různá cvičení a aparát orientace v učebnici, kam patří např. členění na lekce, živá záhlaví, rejstřík.

Učebnice lze využívat z pohledu žáka, kdy pro něj jsou zdrojem informací, ze kterých si může osvojovat poznatky, dovednosti a vytvářet hodnoty a postoje. Z perspektivy učitele slouží k plánování obsahu výuky, formulování očekávaných výstupů vzdělávání apod. (Průcha, 2009)

4.4 Školy, domácí vzdělávání

Po roce 1989 se výrazně rozšířila nabídka škol. Kromě škol státních byly uznány i církevní, soukromé a dnes je řeč i o alternativních školách. Právě tyto alternativní školy jsou známé svými inovativními postupy, kterými se snaží odstraňovat nedostatky, které vnímají u tradičních škol. Dále odstraňují jednotnost vzdělání a chtějí žákům a rodičům nabídnout více možných cest k dosažení daného cíle. Vycházejí z reformní pedagogiky, přičemž mezi jejich hlavní rysy patří pedocentrismus (dítě je v centru zájmu a určujícím prvkem ve výchově, která má napomáhat rozvoji jeho přirozenosti), individuální výchovné cíle, snaha o komplexní výchovu (princip přiměřenosti a aktivnosti), globalismus (celostnost, tematicky orientované vyučování a propojenost předmětů) atd.

Alternativní školy Urbanovská (in Průcha, Pedagogická encyklopedie, 2009) dělí do nestátní a státní sféry. Do nestátní sféry se řadí školy církevní a dále také školy klasické reformní (waldorfské, montessoriovské, daltonské atd.). Mezi státní nebo soukromé školy patří moderní alternativní (např. školy s otevřeným vyučováním, Zdravé školy, s angažovaným učením, integrované). Kromě alternativních škol v doslovném slova smyslu existují i standardní školy, kde se uplatňují některé alternativní programy, třeba jen v jedné třídě. (Urbanovská, in Pedagogická encyklopedie, 2009) V souladu se zněním školského zákona z roku 2004 i tyto školy zpracovávají vlastní školní vzdělávací program, který vychází z RVP ZV.

Variantou ke vzdělávání v určité instituci je možnost domácího vzdělávání. Jedná se o formu individuálního vzdělávání, při kterém je žák vyučován doma. Tvrzová (in Vališová a Kasíková, 2007) uvádí, že vzdělavatelem dítěte musí být osoba, která má alespoň středoškolské vzdělání s maturitou, nemusí se vždy jednat o rodiče (rodina může např. platit soukromého učitele). Dítě je zapsáno v kmenové škole, jejíž ředitel je také odpovědný za výsledky vzdělávání. Nový školský zákon umožňuje požádat o povolení domácího vzdělávání na kterékoliv základní škole v České republice. Žáci jsou dvakrát za rok ve škole přezkušováni, kontakt mezi rodinou a školou je zajišťován formou konzultací. Děti mají možnost zúčastnit se všech akcí pořádaných školou a mohou navštívit výuku některých předmětů, které rodina není schopna zajistit. Absence kontaktu dítěte se svými vrstevníky ve škole by měla být kompenzována volnočasovými aktivitami. V pedagogickém slovníku (Průcha, Walterová, Mareš, 2009) je zmínka o Asociaci pro domácí vzdělávání.

4.5 Kognitivní vývoj dítěte a vliv školy

Z výstupů soudobých výzkumů je patrné, že škola může mít na kognitivní vývoj žáka větší vliv, než jí byl přisuzován dříve. To klade i větší zodpovědnost na učitele, aby znal kognitivní vývoj dítěte a dokázal pracovat s individualitami žáků a pomáhal tak rozvíjet jejich potřeby. Fontana (2003) upozorňuje, že se učitel nesmí nechat svazovat teoreticky vymezenými (zejména časovými) stadii kognitivního vývoje, protože některé děti mohou projít jednotlivými stadii rychleji, ale musí pružně reagovat na konkrétní potřeby žáků a jejich vývoj podporovat. Pokud se prokáže, že je možné vývoj urychlit, role učitele a rodičů bude v tomto případě klíčová.

Díky transformaci českého školství, nejprve po roce 1989 a později zavedením školního vzdělávacího programu, má učitel větší míru svobody v učení. Což s sebou ale přináší i větší míru zodpovědnosti a náročnost přípravy. Učitel může pozitivně ovlivňovat kognitivní vývoj dítěte. Mohou mu v tom pomoci zásady, které Fontana (2003) formuluje v rámci kapitoly, která se zabývá vlivem školy a učitele na kognitivní vývoj dítěte:

- Učitel by měl být vnímavý vzhledem k úrovni, na které dítě myslí. Látka by měla být předkládána dítěti ve srozumitelné a jasné formě, která bude odpovídat jeho úrovni.
- Dítě by mělo mít nárok na možnost porozumění na vyšších úrovních, nemělo by být podmíněno pouze chronologickým věkem a učitel by měl být vnímavý a měl by rozpoznat a respektovat možnosti dítěte. To vede k individuální práci s žákem, konkrétně v matematice možností řešení obtížnějších úloh.

- Před fází formálních znalostí by mělo být dítěti poskytnuto co nejvíce různých konkrétních zkušeností v dané oblasti, aby dítě na jejich základě mohlo později dospět k abstraktním poznatkům. Například Hejný a kolektiv se, v rámci výuky matematiky, snaží o to, aby žák v různých oblastech získal co nejvíce konkrétních, ze začátku hlavně manipulativních a percepčních zkušeností. Díky tomu dítě dostává hlubší vhled do problematiky a buduje si vlastní schémata, se kterými následně pracuje, a je schopno si uvědomit postup, jakým úlohu řeší. Fontana (2003) upozorňuje na to, že pokud omezujeme zkušenosti dětí, omezujeme současně i jejich chápání.
- Po praktické zkušenosti je zde kladen důraz na řeč. Žáci mají nárok na jazykově podnětné prostředí, učitel by si měl ověřovat, zda žáci rozumí všemu, co se v hodinách říká, a neměl by zapomínat i na to, že by žáci měli rozumět znakům, které používá - to se týká např. matematiky, ověřit si, zda rozumí znaménkům jako plus, rovná se apod.
- Pro zvládnutí vyšší úrovně je potřeba porozumět schématům na nižší úrovni.
- Učitel musí dbát i na potřeby žáků se specifickými poruchami učení. Pokud jejich myšlení neodpovídá chronologickému věku, je úkolem učitele zajistit, aby jim byla látka podávána v odpovídající úrovni.
- Učitel by si měl uvědomit důležitost práce s chybou. Nepodceňovat ji a hledat s žákem, proč k dané chybě došlo a zda se jedná o neporozumění problematice nebo jen o nesoustředěnost.
- *„Značná část učení závisí na „lešení“ poskytnutém učitelem. „Lešení“ by mělo dítě uvést do kontextu, kde bude mít příležitosti k napodobování, ke zvnitřňování (např. vztahováním již k známému) a k praktickému uplatňování praktických pochodů.“ (Fontana 2003, s. 80)*

Fontana (2003) nakonec varuje před důsledným dodržováním chronologických věkových pásem v rámci jednotlivých piagetovských stadií. Vývoj nemusí být rovnoměrný a některé děti mohou dosahovat vyšších úrovní oproti jejich chronologickému věku. Může se však stát, zejména při stresových situacích, že si nemusí dítě s obtížnějším úkolem poradit a může se přechodně vrátit do dřívějšího stadia uvažování. I zde zmiňuje důležitost analýzy příčiny, ke které se může dojít prací s žákovou chybou. Chyba je v tomto případě cennou zpětnou vazbou pro učitele, kdy na základě zkoumání příčin může s dítětem najít postup, který bude pro dítě adekvátní, srozumitelný a pomůže mu překonat předchozí selhání.

4.6 Bloomova taxonomie cílů ve školní praxi

Fontana (2003) zmiňuje Bloomovu taxonomii v souvislosti s tím, jak pomoci učiteli přezkoumat, zda jsou jeho požadavky na žáky vyvážené. Kategorie v kognitivní oblasti dělí takto:

„1. Znalosti: Prostá znalost faktů, výrazů, teorií atd.

2. Porozumění: Porozumění významu těchto znalostí.

3. Uplatnění: Schopnost uplatnit tuto znalost a porozumění v nových a konkrétních situacích.

4. Analýza: Schopnost rozdělit látku na její stavební součásti a rozpoznat vztahy mezi nimi.

5. Syntéza: Schopnost uspořádat tyto součásti do nových a smysluplných vztahů a tím vytvořit nový celek.

6. Hodnocení: Schopnost posoudit hodnotu látky s použitím explicitních a soudržných kritérií buď vytvořených samostatně, nebo odvozených z práce jiných." (Bloom in Fontana, 2003, s. 161)

Dle Kosíkové (2011) Bloomova taxonomie umožňuje formulovat učitelovy požadavky na žáka na různé myšlenkové úrovni. I pro dnešní praxi je tato taxonomie důležitá, protože se uplatňuje při formulování očekávaných výstupů v rámci školních vzdělávacích programů, kde se používají aktivní slovesa. Bloomova taxonomie postupuje od nižších kognitivních cílů k vyšším s tím, že vyšší úrovně poznání v sobě zahrnují nižší.

Kosíková ve své publikaci uvádí taxonomii ve dvou kognitivních úrovních:

- *„Kognitivní úroveň I – jde o kognitivní činnost nižší úrovně, vázanou na kontext a v něm obsažené informace, na jejich příjem, zpracování a další zacházení s nimi – učení s porozuměním – znalost, porozumění – interpretace, aplikace.*
- *Kognitivní úroveň II – jde o kognitivní činnost vyšší úrovně, vázanou na vlastní myšlenkové obsahy, na jejich utváření a zacházení s nimi, rozvíjení metakognice - tvoření, řešení problému, hodnocení. (Krykorková, 2004, s. 174–185, 2008, s. 144)" (Kosíková, 2011, s. 66)*

Kosíková (2011) ještě zmiňuje revidovanou verzi Bloomovy taxonomie:

- Kognitivní úroveň I – učení s porozuměním

1) zapamatování – znovupoznání, vybavování
2) porozumění – interpretování, dokládání příkladem, klasifikování, sumarizování, usuzování, srovnávání, vysvětlování. Na této úrovni žák pracuje se základními informacemi a znalostmi. To, že daným informacím porozuměl, prokáže vlastní interpretací úkolu, vyjádří myšlenku vlastními slovy.
3) aplikace – používání postupů, implementování, využívání v nových situacích

- Kognitivní úroveň II – rozvíjení metakognice

4) analýza – rozlišování, strukturování, přisuzování, žáci v této úrovni pracují s abstraktními a obecnými požadavky
5) hodnotící posouzení – ověřování, posuzování, požadavky na žáky vytvořit nové struktury, navrhnout nové postupy
6) tvoření – generování, plánování, vytváření

Taxonomii tvoří šest cílových kategorií, které postupně gradují, co se týče požadavků na žáka. Začíná se u znalosti a zapamatování, pokračuje se přes pochopení k aplikaci, tvoření a nakonec k hodnotícímu posouzení.

V Bloomově taxonomii jasně vidíme snahu o postupné objevování, zvnitřňování a nakonec i vlastní tvoření a hodnocení. Všechny tyto prvky se objevují i v konstruktivistickém pojetí. Pokud by žák pouze přejímal a aplikoval informace, nedocházelo by k naplňování všech cílů.

5 Výuka zaměřená na matematiku

V dnešní době se rozlišují dva základní přístupy k vyučování, a to konkrétně konstruktivní a transmisivní styl výuky. I na základě RVP ZV se dá říci, že jsou snahy o to, aby se rozvíjela žákova osobnost co nejkomplexněji. Pouhé memorování jde stranou a cílem je, aby žák dané problematice porozuměl. I přes všechny tyto snahy však nelze zabránit tomu, aby se vyučovalo jen v duchu jednoho přístupu. Prvky konstruktivismu a transmise se během vyučovacího procesu prolínají a důležitá je míra použití daných prvků.

5.1 Transmisivní vyučování

Tématu vyučování a transmisi se věnuje Kosíková (2011) a vysvětluje je jako sdělování a předávání poznatků, které vychází z těchto předpokladů:

- že žák neví - přirovnání k pojmu tabula rasa
- učitel ví a umí - je tedy staven do role garanta pravdy
- inteligence je prázdná nádoba

V tomto pojetí výuky zmiňuje převahu výkladových metod a objem řeči učitele, učitelovo dominantní postavení ve vztahu učitel – žák a charakter a četnost interakcí.

Transmisivnímu vyučování se věnuje i Spilková (2005). Zabývá se transformací českého školství po roce 1989. Transmisi označuje jako základní mechanismus poznávání, který je založen na představě, že vzdělanost vzniká kladením poznatků na sebe. V didaktice je to známé jako tradiční, slovně názorné nebo herbartovské pojetí vyučování. Učitel má v tomto případě ve vyučování dominantní postavení. Vzhledem k tomu, že plní roli „nositele pravdy“, prakticky ovládá komunikační prostor - vysvětluje, vykládá, analyzuje, formuluje pravidla, kontroluje a žák je díky tomu pasivnější a jeho úkolem je přijímat. Proto pozorně naslouchá, pozoruje a plní zadané úkoly, odpovídá na otázky, reprodukuje. Transmisivní metoda spočívá hlavně ve verbálním přenášení vědomostí. Chybí zde proces poznávání, hledání, objevování. Žák přichází k poznání jako k hotovému produktu, Spilková v této souvislosti používá pro poznatky slovní spojení „pravdy k věření“, což vede k tomu, že se žák učí nekriticky přijímat informace, což může mít za následek snadnou ovladatelnost a manipulovatelnost. Již na začátku 20. století bylo toto pojetí vyučování ostře kritizováno.

Dewey (in Spilková, 2005) v tomto pojetí spatřuje nedemokratičnost a jednostrannost, kdy je po žácích požadováno pouze přijímání hotových poznatků bez návaznosti na jejich dosavadní zkušenosti a činnosti. Upozorňuje, že dochází k formalismu učebních postupů, na žáky je vyvíjen tlak, aby si zapamatovali a reprodukovali co nejvíce informací, a dochází k přetěžování učivem. Chybí zde zohlednění potřeb žáka a rozvoj jeho osobnosti.

Rogers (in Spilková, 2005) má také výhrady k transmisivnímu pojetí výuky. Nesouhlasí s tím, že učitelé by měli být nositeli vědění a žáci pouhými příjemci. Kritizuje přemíru verbální metody jako hlavního nástroje v procesu vzdělávání a zkoušení jako pouhé kontroly přijatých informací bez ohledu na porozumění. Domnívá se, že v tomto systému je kladen velký důraz na dominantní roli učitele a žáci jsou pro dosažení úspěchu drženi v občasném či neustálém strachu. Žáci nejsou motivováni k vlastní tvořivosti a přemýšlení, pracují jen, pokud je to nutné, případně kontrolováno.

Spilková (2005) zmiňuje, že v dnešní době je již transmisivní pojetí vyučování považováno za překonané, ale v určitých situacích lze některé prvky transmise pozorovat i dnes. Příkladem může být popis činnosti učitele, kdy nejprve volí výklad nové látky, následuje procvičování a opakování. Učitel volí uzavřené otázky a orientuje se pouze na nižší úrovně myšlení - znalost, porozumění, aplikace. Tyto hodiny nejsou pro učitele tolik obtížné na přípravu, protože se drží daného schématu a vyučovací hodinu má zcela pod kontrolou. Zároveň si může sám časově rozvrhnout délku každé výše zmíněné naplánované činnosti. Na druhou stranu však nedává prostor vlastní aktivitě žáků, kdy by mohli objevovat nové poznatky na základě dříve nabytých zkušeností a znalostí.

V souvislosti s možnostmi, které nabízí dnešní doba, kdy je velmi snadný přístup k různým informacím a názorům, je právě velmi důležité budovat pluralitu poznání. Například I v možnosti přehodnotit dosavadní poznání a uznat, že ne vše musí být nezpochybnitelné. Díky přehodnocování dosud platných a uznávaných teorií, které tehdy vyhovovaly dobové úrovni poznání, dochází často dílčími kroky k novým objevům v mnoha oborech. Pokud by se v těchto případech spoléhalo pouze na transmisi dosud platných závěrů, nedocházelo by k vývoji. I dnešní pedagogika se snaží překonávat tradiční způsoby výuky a poznání a měla by motivovat žáky k vlastnímu hledání a objevování souvislostí, protože se v budoucnu očekává, že i oni by měli aktivně přispět k rozvoji různých oblastí lidského života.

I v publikaci Vališové a Kasíkové (2007) se píše, že transmisivní koncepce vzdělání klade důraz na předávání poznatků. Učitele staví do role garanta pravdy a nezohledňuje předchozí zkušenosti žáka. Vyučující zde ztělesňuje zdroj poznání a úlohou žáka je si dané znalosti osvojit. Žákovu inteligenci si lze představit jako prázdnou nádobu, která se postupně naplňuje získanými vědomostmi. V této vzdělávací koncepci probíhá přímé působení učitele na žáka, žák se tedy přizpůsobuje učitelovým požadavkům. Vztah mezi učitelem a žákem je ovlivněn tím, že učitel žáka vede, ovlivňuje a má u žáka autoritu. Kritika transmisivnímu vzdělávání vytýká zejména orientaci na fakta a na výsledky za cenu menší aktivity žáka v procesu učení. Většina výuky probíhá výkladovou formou učitele. To vše se odráží na úrovni porozumění učivu.

Štech (in Kosíková, 2011) se ve své monografii Škola stále nová (s. 128–131) zamýšlí nad tím, proč je transmisivní přístup odmítán a zároveň v jisté formě přetrvává a vyhovuje celé řadě žáků. Jedná se především o žáky, kteří mají vztah k poznání, dokážou získané poznatky dešifrovat, třídit a zhodnotit. V dnešní době však většině žáků tento model nevyhovuje.

Hejný (2014) se vyjadřuje k transmisivnímu pojetí výuky na konkrétních příkladech v rámci vyučování matematiky. Tento přístup zdůvodňuje tím, že není časově tolik náročný, protože učitel nejprve volí výklad, kde ukáže žákům obecný poznatek i jeho aplikaci tak, že zvolí úlohu, na které postup demonstruje. Může žákům sdělit i nějaké rady či mnemotechnické pomůcky, aby jim usnadnil zapamatování. Žáci zde nemají povinnost řešit úlohy předvedeným způsobem, učitel může jednotlivce za jiné přístupy chválit, ovšem objeviteli často neumožňuje svůj postup předvést před spolužáky. Může ho k tomu vést obava, že by dalšími strategiemi řešení mohl zmást slabší žáky, ale nebrání tomu, aby si žáci individuálně sdělovali a přejímali různé postupy řešení. To ovšem nebývá častým jevem. Nedostatek prostoru pro sdělování vlastních postupů spolužákům může mít za následek to, že se žáci neučí svoje myšlenky formulovat tak, aby jim rozuměli ostatní, a to potom vede k obavám učitelů, že když dají prostor pro prezentaci řešení, najdou se žáci, kteří nebudou sledu myšlenek rozumět.

5.2 Konstruktivní vyučování

Konstruktivistické pojetí vychází z toho, že člověk pouze nepřijímá hotové poznatky, ale postupně si vytváří vlastní chápání světa na základě odrazu osobních zkušeností. Konstruktivismus je nyní jedním ze zásadních trendů ve společenských vědách v rámci transformace školství a pohledu na vzdělávání a výchovu. Spilková předkládá tři klíčové předpoklady konstruktivistického pojetí poznávacího procesu:

- *„žák ví a přichází do školy, aby přemýšlel nad svými poznatky, aby je organizoval, prohloubil, obohatil a rozvinul - a to ve skupině (pojetí dítěte jako „nějak“ kompetentního)*
- *učitel zajišťuje, aby každý žák mohl dosáhnout co nejvyšší úrovně za účasti a přispění všech (učitel jako garant metody)*
- *inteligence je určitá oblast, která se modifikuje a obohacuje restrukturováním“ (Spilková, 2005, s. 61)*

Každé dítě přichází do školy s určitým stupněm vědění. Toto vědění ovšem nelze brát jako finální a hotovou věc. Znamená to, že dítě má o probíraném učivu jistou představu, tzv. prekoncept, se kterým v rámci dalšího poznávání pracuje. Nelze předpokládat, že dítě přichází do školy jako tabula rasa a je pouze úkolem učitele, aby mu předal veškeré znalosti.

Konstruktivistické pojetí respektuje pluralitu názorů a právě tato rozdílnost je často brána jako „hnací síla“ vyučování a poznávání, protože při obhajování vlastní domněnky musí žák srozumitelně formulovat své myšlenky a zároveň musí hledat argumenty, které jeho názor podpoří tak, aby obstál. Ostatní žáci se díky tomu učí kriticky zhodnotit názory druhých a nepřijímat informace pouze jako hotové pravdy. Žáci se touto diskuzí postupně přibližují pravdě. Každá nová konstrukce poznatků učí žáky zpřesňovat, korigovat či dokonce destruovat ty předchozí.

Základem konstruktivismu je respektování tzv. blízké zkušenosti dítěte. Učitel musí mít na paměti, že školní práce začíná u toho, co je dětem blízké a co už reálně znají, o čem mají konkrétní představy a zkušenosti. Pro tento způsob je důležité porovnávání toho, co už dítě zná s novými poznatky, kde je nejdůležitější překonání rozporu mezi oběma druhy poznání, ale i mezi rozdílnými stanovisky jednotlivých žáků.

Na rozdíl od tradičního pojetí výuky, kdy je žák stavěn do role příjemce, zde má daleko větší prostor, protože je mu přisuzována role badatele. Na základě žákova objevování a bádání nad danými problémy se podporuje rozvoj kritického a tvořivého myšlení, které se klasifikuje jako kvalitativně vyšší myšlení. V rámci třídy, která je vedena konstruktivním přístupem, dochází k vytvoření kolektivu, kde se žáci navzájem respektují a tvoří badatelskou komunitu, kde se na základě individuální a skupinové práce učí formulovat svoje myšlenky a poznatky. (Spilková, 2005)

Kolář ve Výkladovém slovníku mj. uvádí, že *„žák přichází do školy proto, aby přemýšlel o tom, co už ví, a aby své vědění rozšiřoval." (Kolář, 2012, s. 171)* Toto tvrzení dokládá, že při konstruktivistickém pojetí je kladen důraz na vnitřní motivaci žáka. Žák bere školu jako místo, kde má možnost své myšlení rozvíjet a poznatky rozšiřovat. Pomáhá mu v tom učitel, který je jeho spolupracovníkem, a klima třídy, kde není soutěživý, ale kooperační duch.

5.2.1 Základní schéma vyučovacího procesu v konstruktivistickém pojetí

Vyučovací jednotka se rozděluje do několika fází, z nichž každá má svůj specifický význam i zařazení v průběhu hodiny. Jedná se o fáze motivační, evokaci již nabytých poznatků, učení se novým vědomostem a reflexi. Tyto fáze nejsou uniformní a striktně předepsány, proto se mohou u jednotlivých pedagogů lišit.

Spilková (2005) dává příklad schématu vyučovacího procesu a motivační fázi vidí v navození akční, problémové situace. Přednesení tohoto problému má v dětech vzbudit zájem, zvědavost a chuť problém řešit. Předpokládá se, že učitel má přehled o úrovni stavu vývoje dětí, aby mohl problémovou situaci navodit pro žáky srozumitelným způsobem a žáci se mohli postupně při řešení dostávat na vyšší úroveň. To znamená, že tato situace nemůže být ani příliš jednoduchá, ani příliš obtížná. Ani v jednom případě by nesplňovala svůj účel, tedy motivovat k řešení problému.

Další fáze je založena na přímé aktivitě dětí, kdy individuálně předkládají své dosavadní znalosti a zkušenosti, tzv. prekoncepce. Jakmile je žákova představa spojena s osobním prožitkem, stává se velmi pevnou. Každý žák si vytváří vlastní spontánní koncept světa, který pro něj má svou logiku a tvoří celek. Z tohoto konceptu pak vyplývá způsob řešení situací nejen ve škole, ale i v životě. Pokud u žáka při osvojování nových vědomostí nedojde k jejich vnitřnímu přijetí, může nastat situace, kdy bude rozlišovat vědomosti pro školu a pro život. Tyto oblasti bude chápat odděleně, což není vhodné pro kognitivní vývoj. Pomocí různě zvolených technik žáci předkládají své prekoncepce. Učitel musí počítat s velkou variabilitou jednotlivých názorů, ať jde o úroveň znalosti, či projevu. Žák prezentuje svůj pohled, který je však vázán na jeho konkrétní představy a zkušenosti. Žáci na jednotlivé názory reagují diskuzí a polemizováním, které vede k upřesňování stanovisek.

Pluralita názorů a stanovisek vede ke vzniku sociokognitivního konfliktu, který je později základem k reorganizaci dosavadních návyků a zkušeností. Pro žáky není dostačující pouze informace, že se mýlí, ale je důležité, aby prožili právě tento sociokognitivní konflikt, díky kterému zjistí, že je jejich teorie nedostatečná a nevede k řešení problému. Učitel ještě během této fáze může navozovat tzv. slepé uličky, které mohou žáky v jejich dosavadním přemýšlení překvapit a vyprovokovat v nich touhu po vyřešení situace. Tím se otvírá další prostor pro konfrontaci názorů žáků, což později vede ke zlomu, kdy žák pocítí potřebu překonat překážky, má touhu se dozvědět víc, a to i za cenu přehodnocení svých dosavadních představ. Řešení problému může hledat jak individuálně, tak při skupinové práci.

V závěrečné fázi se učitel snaží o přechod z konkrétních žákových prekonceptů, aby mohli žáci společně s učitelem najít obecně platný koncept, který bude vyhovovat všem kontextům. (Spilková, 2005)

V dnešní době tomuto pojetí vyhovuje tzv. model E-U-R, tedy evokace, uvědomění, reflexe:

- 1. fáze: evokace slouží ke zjišťování, co dítě o problematice ví a k porovnávání dosavadních znalostí v kontextu třídy. Funguje to jako motivace, protože žáci mají možnost prezentovat své dosavadní znalosti a představy.
- 2. fáze: v ní dochází k uvědomování si významu, žák se setkává s novými myšlenkami, které se vztahují k probíranému tématu, musí je uspořádat, třídit a na jejich základě si klade nové otázky. Musí porovnávat shodu nových informací s těmi dosavadními. Nové informace mu však nejsou podávány formou výkladu učitele, ale jsou mu předloženy různé zdroje, možnosti a cesty, jak k novým informacím dojít. V této metodě lze volit individuální i skupinovou práci.
- 3. fáze: je reflexe, kdy si žáci dávají do souvislostí nové učivo i s prekoncepty, v rámci třídy spolu diskutují a výstupem jsou nová významová schémata. Tato schémata se znovu analyzují a vznikají další otázky. Žáci reflektují své prekoncepty a hodnotí, zda se domněnky potvrdily či nikoli.

Pro konstruktivismus je charakteristické, že chápe učení jako proces objevování a ne pouze přejímání předkládaných poznatků. Hodnota tohoto přístupu spočívá i v uspokojování potřeb dítěte na něco přijít, propojit si předchozí znalost s něčím novým, případně svoje postoje přehodnocovat. Tato metoda neslouží pouze k nabytí množství samotných informací, ale vede ke kritické práci s informacemi, se kterými se žáci setkávají. Přidanou hodnotou je budování zodpovědnosti za svá rozhodnutí a schopnost umět podložit své názory, přijímat konstruktivní kritiku a pochopit, že smysl učení není pouze pro školu, ale pro život. (Spilková, 2005)

5.2.2 Vzdělávací oblast konstruktivistická

„Moderní přístup k vyučování, který vychází z předpokladu, že žák si své poznání utváří (konstruuje) sám na základě aktivní práce s informacemi a za pomoci učitele." (Kolář, 2012, s. 171) Autor dále říká, že konstruktivistické pojetí výuky stojí v opozici transmisivnímu přístupu, kdy dochází pouze k předávání hotových poznatků učitelem.

K hlavním zásadám konstruktivistického učení řadí motivaci žáka k učení, schopnost samostatné práce, ale i práce ve skupině, zapojení blízkého i vzdálenějšího okolí do procesu učení. Žák si všímá a hledá souvislosti, přichází do školy proto, aby přemýšlel nad tím, co už ví, a dokázal k tomu přidávat další poznatky a tím své vědění rozšiřoval. V tomto pojetí není učitel autoritou, ale spolupracovníkem žáka v jeho poznávání. Žáci nejsou vedeni k soutěživosti, ale vzájemné pomoci.

V současné době, jak o tom hovoří Kosíková (2011), je obecně přijímaným východiskem didaktických teorií, že je žák aktivní. Dalším východiskem je, že role učitele už není tolik dominantní, jako tomu bylo dříve, ale z učitele se stává pomocník žáka, který ho vede při konstrukci vlastního poznání. Žák toto poznání postupně utváří na základě svých předchozích znalostí, dovedností a zkušeností. Učitel musí volit, jaké vhodné výukové a hodnotící strategie žákovi nabídne, a jak zprostředkuje obsah vzdělávání, aby to odpovídalo možnostem žáka.

5.3 Organizační formy výuky

Díky transformaci českého školství po roce 1989 a následné proměně osnov vzdělávání ve školní vzdělávací programy se značně rozšířila možnost využívat rozličné organizační formy vzdělávání. Učitel získal daleko více prostoru v realizaci výuky, na druhou stranu to ale na něj klade i velkou zodpovědnost. I v matematice se dají a měly by se střídat různé formy výuky. V zásadě známe, jak zmiňuje Kosíková (2011), tři základní organizační formy výuky. Jedná se o hromadnou, neboli frontální výuku, individuální a skupinovou neboli kooperativní výuku.

5.3.1 Hromadná, frontální výuka

Učitel v této formě výuky zaujímá nadřazenou roli, řídí společnou činnost žáků. Je zde uplatňován princip předávání znalostí. Kritika v tomto pojetí organizační formy výuky poukazuje na to, že žák je spíše chápán jako pasivní objekt, kdy se z něj stává pouze příjemce hotových poznatků. Dalším z kritizovaných bodů je tzv. princip stejnosti, kdy zde převažuje výklad, jako jediná metoda, která je předložena všem žákům. Mezi výhody můžeme řadit časovou úsporu, srozumitelnost výuky, která je orientována na cíl, jasné zprostředkování učiva a hodnocení.

5.3.2 Individuální a individualizovaná výuka

Individuální způsob výuky je založen na plnění individuálních cílů. Výhodou je, že každý žák má možnost pracovat svým vlastním tempem a vzhledem k tomu, že individuální cíl vychází přímo z jeho možností, může jej každý žák splnit, což mu umožňuje zažít pocit úspěchu, který je pro něj motivující. Hodnocení není kvantitativní, ale individuální. Mezi přínosy řadíme i samostatně odvedenou práci žáka, podporuje se tak autoregulace žákova učení. Na druhé straně nevýhodou je, že žák není veden ke spolupráci, není podporována interakce a komunikace v sociální skupině.

Individualizovaná výuka umožnuje individuální přístup k žákům a diferenciaci výukových cílů. Lze ji aplikovat během hromadného vyučování, kdy se jedná o přizpůsobení se možnostem žáka. Úkoly je možné zadat na různých úrovních, aby došlo k naplnění potřeb jak rychlých, tak pomalejších žáků. Cílem je zvládnutí dané úrovně všemi žáky. Podporuje se však zvyšování úrovně pro žáky, kteří zvládli úroveň nižší. Tento model je náročný pro učitele, kdy se po něm vyžaduje neustálý přehled o dosažených úrovních jednotlivých žáků.

5.3.3 Skupinová a kooperativní výuka

Skupinová výuka představuje organizační formu výuky, kdy žáci pracují ve skupinách, které mohou být z hlediska věku, schopnosti, prospěchu, pohlaví homogenní nebo heterogenní, trvalé nebo proměnlivé. Pracovní skupiny by měly mít 5-7 žáků. Tato forma výuky spočívá ve spolupráci a zapojení všech žáků, s důrazem na komunikaci a odpovědnost za výsledek společné práce. Mezi negativa však patří, že žáci nepracují rovnoměrně, systematicky a hodnocení skupinové práce je obtížné. Pro učitele to znamená i náročnou přípravu.

Kooperativní výuka je založena na principu práce při dosahování společných cílů. Nedílnou součástí je pozitivní vzájemná závislost, kdy prospěch jedince vyjadřuje prospěch celé skupiny. Dále se vyznačuje odpovědností jednotlivce za společnou práci, individuální výkon žáka se odráží v hodnocení práce celé skupiny. Kooperativní výuka podporuje účinnou sociální dovednost. Úskalí může přinést nevhodné rozdělení do skupin.

V České republice se tématu kooperace a kooperativní školy věnuje Kasíková (2010). Napsala monografie, které jsou přímo věnovány této problematice a podrobně v nich charakterizuje kooperaci, role žáků, učitelů. Na základě výzkumů a zkušeností radí, které metody a techniky jsou pro tuto práci nejvhodnější.

6 Matematika jako školní předmět

Matematika je jedním z nejdůležitějších předmětů ve škole. Žáka „provází“ po celou dobu povinné školní docházky. Má své kořeny v historii, kdy byla jedním z vyučovaných předmětů. Není proto divu, že i lidé výuku matematiky vnímají jako podstatnou a i hodnocení z předmětu matematika často staví mezi ty důležitější. Tato kapitola se proto zabývá matematikou v kurikulárních dokumentech, různým přístupům k výuce matematiky a dále se blíže věnuje problematice dělení se zbytkem

6.1 Matematika a její aplikace v RVP ZV

„Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě a umožňuje tak získat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.“ (RVP ZV 2007, s. 29)

Vzdělávací obsah oboru Matematika a její aplikace je rozdělen na čtyři tematické okruhy:

- Čísla a početní operace na 1. stupni, na který na 2. stupni navazuje Číslo a proměnná
- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Geometrie v rovině a v prostoru
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Pro každý tematický okruh jsou zpracovány očekávané výstupy pro 1. stupeň (1. a 2. období) a pro 2. stupeň. (příloha 1) Pod výčtem výstupů je vždy uvedeno i konkrétní učivo, které se k výstupům přímo vztahuje. V kapitole Matematika a její aplikace je rozpracované i cílové zaměření celé vzdělávací oblasti, které směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí.

6.2 Přístupy k vyučování v matematice

Oba výše zmíněné přístupy k vyučování, tedy transmisivní a konstruktivistický, se do jisté míry uplatňují v českém školství i při výuce matematiky.

Hejný (in Spilková, 2005) konstatuje, že naše současné školství je stále v zajetí transmisivního přístupu. Jsou zde různé důvody, proč tomu tak je, např. pro některé učitele je tento přístup nejúčinnější, jiní další metody neznají a část učitelů sice sympatizuje s konstruktivistickými myšlenkami, ale je pro ně rozhodující kvantitativní hledisko veřejného srovnávání, ke kterému dochází třeba u přijímacích zkoušek a pohovorů.

Dnes jsou patrné sílící snahy o změnu pojetí vyučování a dává se více prostoru konstruktivismu. Důkazem toho mohou být některé vysoké školy, kde je didaktika matematiky vyučována v tomto duchu. Hejný (in Spilková, 2005) poukazuje na změny, které se udály ve výuce cizích jazyků po roce 1989, kdy se otevřely hranice a objevila se intenzivnější potřeba se v cizině jazykem aktivně domluvit. Tím se změnilo očekávání rodičů, kdy už nevyžadují pouze výbornou známku, ale kladou velké nároky na schopnost dítěte jazyk aktivně využívat. Odstupuje se např. pouze od testování znalosti slovíček a daleko větší důležitost je přikládána konverzaci a upotřebení jazyka v běžném životě. Dokazuje to i množství mezinárodních projektů, kterých se žáci mohou účastnit. Tyto změny jsou inspirací i pro matematiku, kde však zatím k žádným velkým inovacím nedošlo. Řada rodičů si neuvědomuje, že i v matematice nemusí docházet pouze k počítání a řešení úloh, ale je zde prostor i pro osobní rozvoj jedince.

Někteří rodiče zastávají názor, že matematika v době využívání techniky a kalkulaček ztrácí svůj význam a má přínos pouze pro minimum populace, které se vědnímu oboru věnuje profesionálně. Dalším předsudkem při hodnocení důležitosti matematiky je vyžadování reprodukce naučených algoritmů, kdy se nabízí jednoduché srovnání nejen mezi žáky, ale i u samotného žáka. Někteří rodiče ztotožňují úspěch v matematice s rychlostí a kvantitou vyřešených úloh podle naučených postupů.

Často se stává, že za úspěšného žáka v matematice je považován rychlý a neomylný počtář. To ještě podporují testy, které se skládají z množství úloh, kdy je často potřeba pouze aplikovat naučený vzorec a být tak úspěšný. Tento přístup je založen na reprodukci a imitaci, který vůbec nevyhovuje tvořivým dětem, které mají potřebu realizovat objevy. Hejný (in Spilková, 2005) vidí východisko např. ve změně způsobu testování a hodnocení, kdy by kvantitativní hledisko mělo být nahrazeno kvalitativním. Dítě by mělo mít možnost své řešení zdůvodnit a vysvětlit. Na základě těchto získaných informací by měl učitel vytvářet diagnostiku žáka. Dalším východiskem je diferenciace učitelů, kdy je potřeba podporovat učitele, kteří se snaží učit konstruktivisticky.

6.3 Pojetí primárního matematického vzdělávání

S přechodem od osnov k rámcovému vzdělávacímu programu je dán pedagogickým pracovníkům větší prostor k vytváření koncepce vzdělávání na jejich škole. Učitelé už nemají předepsaný obsah jednotlivých vyučovacích hodin, ale v rámci školy si připravují konkrétní školní vzdělávací program, který vychází z charakteru školy. Na prvním stupni se musí dodržet očekávané výstupy po 3. a 5. ročníku a je na učitelích, jaké zvolí metody a organizační formy k dosažení těchto cílů. Vzhledem k této větší svobodě dochází i k širším možnostem výběru metod výuky.

Hejný přirovnává původní vyučování dle osnov ke kumulativnímu principu ukládání poznatků. Zároveň však dodává, že neexistuje žádný biologický systém, který by se takto choval. Říká, že *„každé organické narůstání vede ke kvalitativním změnám. Proto je kumulativní princip v disharmonii s vývojem kognitivní struktury žáka a napomáhá patologickým změnám kognice. Mezi těmi je nejzávažnější formalismus – poznání uchované pamětí bez poznání příčin a souvislostí, bez propojení poznatků na životní zkušenost žáka."(Hejný in Spilková 2005, s. 183)* Jako řešení nabízí přechod z kumulativního principu na genetický.

Genetický princip vede žáka k novým restrukturalizacím. V restrukturalizacích vidí možnost vytvoření efektivnější struktury, která napomáhá žákům úspěšně reagovat na podněty s vynaložením menšího úsilí.

Hejný pro přijetí genetického principu pro strukturu vzdělávání vyžaduje akceptování těchto bodů:

- *„nepovažovat nehotové a rodící se znalosti žáka za chybné, nahlížet na ně jako na etapu vývoje žákova matematického poznání; zejména pokud jde o samostatné žákovy objevy*
- *respektovat individualitu žáka, nežádat od něj imitaci předepsaných početních postupů a algoritmů, snažit se porozumět jeho postupu nebo jeho interpretaci daného poznatku*
- *výrazně posílit propedeutické etapy budování závažných matematických myšlenek, zejména pojmů (například s některými zlomky, desetinnými čísly a zápornými čísly by se měl žák setkat již ve 2. ročníku a s limitním procesem již v 5. ročníku)" (Hejný in Spilková 2005, s. 184)*

V procesu objevování se člověk setká jak s úspěchem, tak často i s neúspěchem. Neúspěšné cesty poznání Hejný řadí na stejnou úroveň důležitosti jako ty úspěšné. Je to dáno tím, že bez rozboru chyby nelze dojít k poznání pravdy. Často i na základě uvědomění si špatného postupu řešení žák objeví tu správnou cestu.

6.4 Užití algoritmu

Ve prospěch předložení postupu řešení mohou často vést následující důvody: úspora času, pocit učitele, že volí pro dítě tu nejjednodušší formu a ulehčuje mu práci, jednotný způsob řešení pro snazší opravování testů. Učitel předvede ukázkovou úlohu, kde daný algoritmus užije, následují úlohy, kde se intenzivně procvičuje, aby každý žák dokázal postup aplikovat. Při testu žák prokáže, zda byl úspěšný či nikoli. Někteří učitelé volí tuto cestu i na základě práce s učebnicemi, protože řada učebnic je koncipována tímto transmisivním pojetím. Je však potřeba dodat, že se zde uplatňuje spoléhání se na paměť, protože žák se neučí porozumět předloženému vzorci, ale učí se ho pouze používat. Žáci vedeni tímto způsobem později nemají potřebu hledat více řešení, protože vědí, že k tomu, aby byli úspěšní, jim stačí najít pouze jedno (pokud není uvedeno jinak).

Pro řadu rodičů je pojetí matematiky jako aplikace překládaných vzorců „nejschůdnější cestou". Může to pramenit z toho, že sami touto matematikou prošli, vzorce znají a nemalý počet z nich si pamatují. I když třeba přiznávají, že k matematice nikdy neměli kladný vztah, že je nebavila, mají pocit, že naučení se algoritmům učiní dítě úspěšné. Dále mohou mít pocit, že svému dítěti mohou v učení pomoci, protože typy úloh a algoritmy znají. Od dítěte očekávají správné výsledky daných úloh a případný neúspěch často řeší drilem bez porozumění. Rodiče mohou mít pocit, že tento způsob učení z jejich dítěte udělá rychlého a neomylného počtáře. Utvrzuje je v tom i množství úloh, které žáci během hodiny vypočítají, protože se tempo postupně zvyšuje a vidí jejich výsledky okamžitě.

6.5 Teorie vyučování matematiky

V průběhu let se ve vyučování matematiky uplatňovaly různé směry. V současné době se hojně rozvíjí Teorie generického modelu, která je založena na konstruktivistickém pojetí výuky.

6.5.1 Teorie generického modelu

Teorii generického modelu vytvořil V. Hejný v letech 1942–1977. Podnětem pro jeho tvorbu byla otázka, proč se značný počet žáků snaží zvládnout učivo matematiky zpaměti a matematice nerozumí. Dále se pokoušel najít způsob, jak tento stav zlepšit tím, že bude u žáků budovat jasné představy pojmů, bude je vést k porozumění vztahům a znalosti procesů. (Hejný, 2014) Tyto původní myšlenky V. Hejného byly během posledních 35 let rozšířeny, prohloubeny a aplikovány ve výuce na všech stupních škol. Staly se východiskem při tvorbě učebnic, nejprve pro 1.–5. ročník ZŠ a dále pro 2. stupeň. Hejný rozpracovává pět etap poznávacího procesu následovně:

1) motivace

2) izolované modely

- zdvih – zobecnění

3) generický model procesuální => konceptuální

- zdvih – abstrakce

4) abstraktní poznatek

5) krystalizace

6.5.1.1 Motivace

Motivace podle Hejného (2014) hraje klíčovou roli pro kvalitu celého poznávacího procesu. Je třeba si uvědomit rozdíl mezi dítětem, které chce poznávat z vlastní vůle, a které je k poznávání nuceno. Žák, který má vnitřní potřebu poznávat, bude mít snahu poznávat intenzivněji, hlouběji a komplexněji. Pro děti je samozřejmá zvídavost, touha po poznání a po porozumění věcem, které je obklopují. Tato vnitřní motivace se postupem času během školní docházky často mění spíše ve vnější, kdy se podnětem učení pro žáka stává snaha získat dobrou známku, nebo obava ze špatného prospěchu. Učitelé si uvědomují důležitost prvku motivace, proto se snaží zařazovat do výuky různé aktivity, které mají motivační charakter. Zde je ovšem riziko, že tyto činnosti nemusí tuto funkci plnit u všech dětí stejně. Jedná se např. o různé soutěže, které jsou časově omezené, což může být důvodem k obavám u pomalejších počtářů. Jiným nástrojem, jak žáky v matematice motivovat, je možnost zasadit úlohy do pro žáky atraktivního kontextu. Např. různé záhady, šifrování tajných zpráv, sci-fi apod. Tyto způsoby Hejný (2014) považuje za účinné, upozorňuje, že je od učitele vyžadována vynalézavost, ale vnímá je spíše jen jako krátkodobé.

Dle jeho zkušeností se jako nejúčinnější motivací jeví žákův pocit z úspěchu a radost, kterou má po vyřešení adekvátně náročné úlohy. Tento úspěch mu přináší pocit intelektuálního růstu a ze sociálního hlediska může cítit uznání a pochvalu. Aspekt přiměřeně náročné úlohy je podstatný, protože vyřešení příliš jednoduché úlohy žáka dostatečně nenaplní a příliš těžká úloha může vést naopak k demotivaci. Učitel si musí uvědomit, že má ve třídě žáky matematicky velmi zdatné, ale také slabší, a úloha, která se jednomu žákovi může jevit jako přiměřená, může být pro jiného příliš obtížná nebo pro dalšího příliš jednoduchá. To by učitele mělo vést k individualizaci výuky a k diagnostice třídy.

6.5.1.2 Izolované modely

Druhou etapu poznávacího procesu – izolované modely – Hejný dělí na čtyři podetapy:

„1) Ve vědomí se usadí první konkrétní zkušenost – zárodek příštího poznání.

2) Postupný příchod dalších izolovaných modelů, které zatím nejsou propojeny. Mohou se objevit i modely zdánlivé a být zamítnuty modely překvapivé.

3) Některé modely začnou na sebe poukazovat a shlukovat se do skupin a oddělovat od jiných. Vzniká tušení, že tyto modely jsou v jistém smyslu „stejné“.

4) Zjištění podstaty oné „stejnosti“ vede k vytvoření komunity modelů.“ (Hejný, 2014, s. 48)

Jen málokdy se podaří všechny 4 etapy evidovat, protože u některých poznávacích procesů může etapa izolovaného modelu trvat pouze chvilku, naopak jindy může trvat i měsíce.

6.5.1.3 Generický model

„Generický model vzniká procesem zobecnění (generalizací) z komunity izolovaných modelů, přesněji ze čtvrté podetapy izolovaných modelů, se kterou v mnoha případech splývá. Proces je často nesen AHA – efektem, náhlým uzřením společné podstaty série izolovaných modelů.“ (Hejný, 2014, s. 51) Generický model považuje za jádro skutečného poznání. V poznávacím procesu zastává generický model dvojí roli. Směrem dolů sjednocuje jednotlivé izolované modely, směrem nahoru je východiskem pro vytvoření generického modelu vyšší úrovně. Generický model slouží k popisu jistých poznatků pomocí konkrétních čísel nebo tvarů. Ale daný poznatek je chápán v obecné rovině.

6.5.1.4 Abstraktní poznatek

Jedná se o zavedení písmena na místo obecného čísla. Rozdíl je v tom, zda žák učinil objev, nebo zda se mu poznatek dostal do paměti jako informace. V druhém případě je to poznatek formální. Pokud však žák vytvořil poznatek abstrakčním zdvihem z generického modelu, jedná se o abstraktní znalost. Nahrazením čísel písmeny dochází ke změně jazyka a jazyk písmen je plně zaveden až na 2. stupni ZŠ. V některých případech se písmena používají i na 1. stupni. (Hejný, 2014)

6.5.1.5 Krystalizace

Ve výčtu etap je krystalizace uvedena jako poslední etapa poznávacího procesu, ale toto umístění označuje Hejný za nepřesné, protože ke krystalizaci dochází od okamžiku objevení se prvního generického modelu, někdy ji lze nalézt i u izolovaného modelu. *„Krystalizace probíhá permanentně a jejím hlavním cílem je vytvořit dostatečně hustou síť vazeb mezi jednotlivými poznatky. Krystalizace je proces uhnízdění nového poznatku ve vědomí žáka, nejednou ve dvou nebo i více oblastech." (Hejný, 2014, s. 73)* Proces krystalizace se prolíná i s kladením nových otázek a hledáním dalších souvislostí, což by se dalo shrnout procesem objevování.

6.6 Číslo

Hejný (2009) konstatuje, že se náš svět neobejde bez čísel. Dokládá to výskytem čísla na různých místech v literatuře a tisku. Člověk má přirozeně tendenci vnímat číslo jako kvantitu, zatímco Hejný upozorňuje na to, že při podrobnějším zkoumání lze zjistit, že se nejedná o jeden druh čísla, ale přinejmenším o 7 různých druhů. Číslo lze vyjádřit jako stav (počet, pořadí, míra), operátor (změny, porovnání), označení (adresa, kód).

Dítě začíná svět čísel poznávat už v předškolním věku, jak zmiňuje Hejný (2014). Nejprve to jsou malá přirozená čísla, která později ve škole rozšíří na čísla větší. Dále se nebude pohybovat pouze v oboru přirozených čísel, ale přibudou k nim i zlomky, desetinná čísla, záporná čísla i čísla iracionální. K tomuto objevování dochází postupně, jak dokazuje Vygotského zóna nejbližšího vývoje (Vygotskij in Hejný, 2014).

Na číslo lze nahlížet sémanticky i strukturálně, jak zmiňoval Hejný v jedné z přednášek na Pedagogické fakultě. Číslo je podle něj uloženo ve vědomí dítěte ve dvou základních prolínajících se schématech. Sémantické představy o čísle jsou ty, ve kterých je číslo propojeno na životní zkušenosti jedince. Z učiva se k nim řadí hlavně slovní úlohy. Ve strukturálních představách o čísle se čísla objevují pouze ve vzájemné vazbě bez propojení na životní zkušenosti jedince.

Jak bylo zmíněno, sémantické představy žáka o čísle jsou rozhodující právě při řešení slovních úloh. Žák při jejich řešení může selhat proto, že nedokáže úlohu uchopit, neumí si představit slovně popsanou situaci. Hejný do této kategorie řadí zejména dynamické úlohy (úlohy o věku, o pohybu a úlohy typu plnění bazénu několika přítoky), dále sem řadí úlohy obsahující nadbytečná čísla, úlohy, které pracují pouze s operátory a úlohy s antisignálem. (Pro vysvětlení antisignálu lze užít slovní úlohu s komentářem: „*Do tramvaje přistoupilo*

5 lidí, takže teď jich tam je 21. Kolik lidí jelo v tramvaji předtím? V úloze je slovo přistoupilo, ale příslušná operace není sčítání, nýbrž odčítání. Zde působí předpona „při-„ jako antisignál." (Hejný, 2009, s. 35)).

Strukturální představy žáka o čísle, jak říká Hejný, jsou ve většině případů velice chatrné. Žák umí sice pamětně i písemně sčítat, odčítat, násobit a dělit, ale nerozumí číselným situacím, postupům a vazbám. Nedokáže vysvětlit, proč daná operace funguje tak, jak funguje. Mezi časté odpovědi na otázky, proč to tak je, patří, „tak jsme se to učili". Na 1. stupni ZŠ jsou úlohy, které se dají povětšinou vyřešit pomocí algoritmů, ale problém nastává už při přechodu na 2. stupeň, kde se obsah učiva rozšiřuje a nelze již vše zvládnout pouze pamětí. Tak se může stát, že žák, který byl na 1. stupni v matematice výborný, začne mít později problémy. Hejný to dává za vinu špatné edukační strategii, která se zaměřuje na rychlé a spolehlivé počítání, ale zanedbává hlubší porozumění struktuře čísel. Jako řešení nabízí propojení sémantických a strukturálních představ pomocí vytvoření „umělých" sémantických prostředí, ve kterých předkládá množství úloh, které vedou k pochopení vztahů mezi čísly jednotlivými vazbami.

6.7 Binární relace

V binární relaci se mluví o vztahu dvou čísel. Hejný (2014) uvádí, že žák pozná šest binárních relací. První se týká rovnosti, další čtyři se týkají uspořádání a jsou si velmi blízké a poslední dělitelnosti.

Rovnost se zavádí v oboru přirozených, celých, racionálních a reálných čísel. Z didaktického hlediska vnímá jako důležité všechny tři vlastnosti rovnosti: reflexivitu (vztah A=A pro každé A), transitivitu (implikace A=B a B=C => A=C) a symetrii. Právě symetrie je narušena při operaci dělení se zbytkem. Hejný uvádí, že vztah 13 : 4 = 3 (1) nelze přepsat do tvaru 3 (1) = 13 : 4.

Uspořádání se zavádí v přirozených, celých, racionálních i reálných číslech. Používají se zde znaky <, >, ≤, ≥. Mezi těmito znaky je úzké propojení, což znamená, že získání vhledu do jednoho z těchto znaků vede k lehčímu vhledu i do dalších. Představa uspořádání vychází z druhého stupně přídavných jmen a Hejný jako příklad uvádí *„Mirek má více autíček než Luděk."(Hejný, 2014, s. 136)*

Dělitelnost se v přirozených resp. celých číslech značí svislou čárkou │. (3│12 značí, že číslo 12 je dělitelné číslem 3.) Znamená to, že o dělitelnosti lze mluvit pouze v oboru přirozených resp. celých čísel s tím, že 0│5 nemá smysl. (Hejný, 2014)

6.8 Dělení se zbytkem

Problematika dělení se zbytkem není v České republice didakticky podrobně rozpracována. V metodických příručkách se jí autoři příliš nevěnují, případně její zvládnutí zmíní jako důležitý předpoklad pro písemné dělení jednociferným číslem. Hejný (2014) oblast dělení se zbytkem popisuje v monografii, která se věnuje budování schémat v matematice. Dělení, potažmo i dělení se zbytkem, řadí mezi práci s čísly. S lítostí konstatuje, že většina učitelů považuje za úspěch či dosažení vzdělávacích cílů, když žák na konci prvního stupně zvládá matematické operace na základě použití předložených algoritmů v číselném oboru přirozených čísel do 100. Nebuduje se zde porozumění či hledání vlastních strategií. Pro úspěšnost se stačí pouze naučit používat rychle a bezchybně předložené postupy řešení. Princip spočívá ve využívání paměti při učení a nácviku. Je zde opomíjen rozvoj intelektuálních schopností žáka.

S výhledem do budoucnosti je pro žáky daleko přínosnější učit se porozumět daným operacím, než se pouze mechanicky učit vzorce nazpaměť. Porozumění rozvíjí intelektuální schopnosti dítěte a má velký význam nejen pro matematiku, ale i pro další oblasti života.

Hejný předkládá čtyři důležité diagnostické indikátory pro dělení se zbytkem. První tři indikátory jsou společné pro operace sčítání, odčítání, násobení a dělení. Čtvrtý přidává k dělení se zbytkem.

„Žák rozumí smyslu operace:

- *spolehlivě vyřeší základní slovní úlohu*
- *pomocí dramatizace, manipulace nebo obrázku spolehlivě uchopí úlohu s antisignálem*
- *vytvoří dobrou slovní úlohu, jejíž matematický model je dán“ (Hejný, 2014, s. 169)*
  V rámci dělení se zbytkem konkretizováno např.: „Žák umí vytvořit slovní úlohu, jejíž matematický model je 25 : 7 = 3 (4)“ (Hejný, 2014, s. 198)
- *„rozumí objektu 3 (4)“ (Hejný, 2014, s. 198)*

Výsledek u dělení se zbytkem, na rozdíl od sčítání, odčítání, násobení i dělení (v rámci desetinných čísel), je zapsán dvěma čísly. Pro žáky je to nová situace a je potřeba získat dostatek různých zkušeností k jejímu porozumění. K tomu mohou pomoci vhodně zvolené úlohy. Hejný uvádí např. tyto: *„Do dělení se zbytkem doplň scházející čísla. Hledej všechna řešení. Řeš pro a) 37 : _ = _ (2); b) _ _ : 3 = 4 (_); c) _ _ : _ _ = 7 (2). (Hejný, 2014, s. 199)* Tato úloha je záměrně zvolena, aby vedla postupně k odhalení, že u úlohy c) výsledek 7 (2) není číslo, ale množina výrazů typu 23 : 3 = 7 (2); 30 : 4 = 7 (2), atd. Zadání je postupně gradováno a od konkrétního jednoznačného řešení v případě a) se postupně dostáváme až k množině čísel a později k formulování závěru, že právě v této množině čísel si výsledky nemohou být rovny. A dalším závěrem bude, že úloha, která je zadána pouze neúplným podílem a zbytkem, představuje nekonečnou řadu řešení.

Hejný nepředkládá pouze jedno vzorové řešení, které by užíval pro všechny úlohy, kde se vyskytuje dělení se zbytkem. Rozlišuje čtyři základní strategie, které žáci užívají při řešení. Tyto strategie reagují na podstatu zadání slovní úlohy. Mezi ně řadí: rozdělování, přidělování, postupné odčítání, formování do obdélníku.

Pokud žáci nejsou omezováni předloženým způsobem řešení, mohou pomocí „zdravého selského rozumu“ úlohy řešit sami a též dospět k výsledku. Je pravděpodobné, že použijí některou z výše zmíněných strategií. Často sám typ slovní úlohy přímo vybízí k užití konkrétní strategie. To přispívá k tomu, že žáci nejsou pouze nuceni řadit čísla tak, aby mohli užít daný vzorec, ale mohou úlohy řešit s porozuměním, kdy přesně ví, co které číslo v dané situaci představuje. Vede je to k zamyšlení se nad analýzou předloženého problému. Jako příklady k užití jednotlivých strategií volí konkrétní slovní úlohy:

- strategie rozdělování (též dělení na části): *„Rozděl 19 žáků do 3 stejně početných skupin. Kolik žáků bude ve skupině, kolik žáků zůstane nezařazeno?“ (Hejný, 2014, s. 198).* K řešení doporučuje použít např. knoflíky, kdy si připraví 19 kusů, ty postupně rozděluje po jednom střídavě do tří přihrádek a počítá je. Když do každé přihrádky dá 6 kusů, dospěl k číslu 18 a 1 knoflík mu zbude. Numericky zapíše 19 : 3 = 6 (1)
- strategie přidělování (též dělení po částech): *„Výrobce má spoustu karoserií autíček, ale jenom 23 kol na tato autíčka. Kolik autíček může z těchto kol vyrobit a kolik koleček mu zůstane?“ (Hejný, 2014, s. 198).* Žák si pomůže grafikou, kdy si kolečka znázorní např. pomocí čárek. K výrobě jednoho autíčka potřebuje 4 kola,

proto bude vytvářet tzv. „brambory“, kdy vždy 4 čárky zakroužkuje. V tomto případě vznikne 5 „brambor“ a 3 čárky zůstanou. Numericky zapíše grafické znázornění jako 23 : 4 = 5 (3)

- strategie postupného odčítání – je vyšší modifikací strategie přidělování. Postup je stejný jako u předchozí strategie, ale manipulace je zde nahrazena výpočtem. *„Výrobce má spoustu karoserií autíček, ale jenom 23 kol na tato autíčka. Kolik autíček může z těchto kol vyrobit a kolik koleček mu zůstane?“ (Hejný, 2014, s. 198).* Žák řeší rovnou numericky, kdy zapíše 23 a postupně odčítá číslo 4, protože každé autíčko potřebuje k výrobě 4 kola. Numerický postup vypadá takto: 23 – 4 – 4 – 4 – 4 – 4 = 3. Během psaní říká průběžné výsledky tj. 19, 15, 11, 7, 3. Ze zápisu zjistí, že čtyřek napsal pět a zapíše 23 : 4 = 5 (3). Rychlejší formou je pouhé zapisování dílčích výsledků, kdy operace – 4 probíhá pouze v mysli. Postup zapíše tímto způsobem: 23, 19, 15, 11, 7, 3. Úskalí představuje, že v rychlejší formě nevidí, kolikrát při odčítání použil číslo 4. Musí si tedy uvědomit, že v každé mezeře proběhla operace odčítání.
- strategie formování do obdélníku: *„Na dvoře se 29 cvičenců postavilo do čtyřstupu. Kolik těch čtyřstupů bylo? Kolik cvičenců zůstalo nezařazených?“ (Hejný, 2014, s. 198).* Pokud je úloha zadána tak, že počet cvičenců odpovídá počtu žáků, je možné ji přímo zdramatizovat. K řešení však postačí i použití čtverečkovaného papíru. Hejný tuto možnost řešení popisuje na různých situacích uskupení žáků. *„Prostředí (formování do obdélníku) je manipulativní. Poprvé jej lze dramatizovat. Skutečně postavit žáky do tří čtyřstupů. Z toho vidíme, že 12 : 4 = 3. Když žáci udělají vlevo bok, budou to čtyři trojstupy, tedy vztah 12 : 3 = 4. Trochu složitější situace vznikne, když přidáme dalšího žáka. Situace bude znázorňovat vztah 13 : 4 = 3 (1) i vztah 13 : 3 = 4 (1). Situace se podstatně změní, když přidáme další dva žáky. Dělení 15 : 4 = 3 (3) je reprezentováno třemi čtyřstupy a posledním neúplným stupem se třemi žáky. Když teď všichni udělají vlevo bok, vznikne zdánlivě situace typu 15 : 3 = 4 (3). To je ale omyl. Tři žáci, kteří dříve tvořili neúplný čtyřstup, tvoří teď úplný trojstup a po přemístění vytvoří skupina situaci pro dělení 15 : 3 = 5 (0).“ (Hejný, 2014, s. 198)*

V zadání slovních úloh s tématikou dělení se zbytkem se často setkáváme se spojením „spravedlivě rozděl“. Děti jsou velmi citlivé na slovo spravedlivě a zadání slovních úloh může ve třídě rozpoutat diskuzi na toto téma. Hejný pro názornost užívá konkrétní situace, kdy dokazuje, že žáci vnímají rozdíl mezi spravedlností matematickou a sociální. Jako příklad mu slouží situace, kdy žák poukáže na to, když tříletý a osmiletý sourozenec dostanou stejně velkou porci jídla k obědu. Potom to není spravedlivé. Další ilustrací může být závod zdravého a hendikepovaného člověka za stejných podmínek. Pakliže se tato diskuze ve třídě objeví a rozvine, učitel v rámci interdisciplinarity může tento podnět od žáků využít v rámci etické výchovy. A zároveň objasní situaci pro matematiku, kdy je pro řešení důležité, aby si byli všichni podílníci rovni. Přesah diskuze i do oblasti mezilidských vztahů je důležitá, učitel by ji neměl opomíjet a je možné, i skrze na první pohled zdánlivě matematickou úlohu, naplňovat průřezová témata z osobnostní a sociální výchovy.

Aby se žáci vyhnuli otázce, co se zbytkem, často přichází s nápadem, že by bylo možné zbytek ještě rozdělit mezi podílníky. Jako řešení obvykle navrhují zbytek nakrájet. To však není možné, když jsou objekty nedělitelné. Hejný (2014) uvádí příklad živých tvorů, bublin nebo gólů.

7 Analýza učebnic

Jedním z cílů diplomové práce byla analýza dostupných ucelených řad učebnic. Pro tento účel jsem vybrala učebnice z Nakladatelství Alter, protože jsou v České republice zřejmě jedněmi z nejpoužívanějších a i já jsem se podle něj na 1. stupni matematiku učila. Jako další řadu jsem zvolila učebnice nakladatelství Prodos a třetí vybraná řada pochází z Nakladatelství Fraus (Hejného metoda), která není na školách tolik rozšířena, ale v rámci studia na Pedagogické fakultě byla v didaktických i teoretických předmětech nejvíce používána a já sama podle ní učím. Učebnice patří mezi didaktické pomůcky (viz. kapitola 4.3) ve vyučovacím procesu, v hodinách matematiky se používají takřka každou hodinu. Pokud má učitel možnost volby, měl by pečlivě zvažovat, které učebnice pro výuku zvolí.

Užitím pojmu Nakladatelství Alter v textu mám na mysli kolektiv autorů, kteří tuto ucelenou řadu učebnic sestavili. Jimi jsou: Blažková, Matoušková, Vaňurová, Eichlerová, Staudková, Vlček, Justová. V případě nakladatelství Prodos odkazuji na autorskou dvojici: Molnár, Mikulenková a u Nakladatelství Fraus se jedná o kolektiv autorů: Hejný, Jirotková, Slezáková, Michnová, Bomerová.

Díky podrobné analýze učebnic z hlediska dělení se zbytkem jsem dospěla k názoru, že i v tradičním pojetí matematiky, které předkládají nakladatelství Alter a Prodos, lze nalézt zajímavé úlohy, se kterými by se dalo pracovat konstruktivisticky. Cílem analýzy bylo zmapovat zpracování problematiky dělení se zbytkem v pojetí různých autorů učebnic. Někteří autoři se snažili spíše o naučení algoritmu a jeho důsledné procvičení, aby nakonec došlo k zautomatizování řešení úloh tohoto typu. Jiní autoři dávali přednost objevení a pochopení vazeb mezi jednotlivými čísly u dělení se zbytkem a následnému využití těchto poznatků v dalších úlohách. Je na každém učiteli, jaká metoda je mu nejbližší a kterou bude potom předkládat žákům bez ohledu na používanou učebnici. Nehledala jsem univerzální návod, jak učit dělit se zbytkem, spíše mi šlo o inspiraci, co by bylo možné ve výuce použít a v trendu dnešní pedagogiky zpracovat. Z toho pramení i úvahy nad tím, jak by se úlohy mohly modifikovat pro hlubší využití.

Pro větší přehlednost budu v práci dále užívat kódování jednotlivých úloh, které analyzuji ve tvaru: nakladatelství/U = učebnice, pracovní sešit = PS, pracovní učebnice = PU/ římskými číslicemi uvedený ročník/díl/strana. Pod kódem Prodos/U/I/2. díl/s. 3 je myšlena úloha z nakladatelství Prodos, učebnice pro 1. ročník, 2. díl na straně 3.

7.1 Současná nabídka učebnic pro výuku matematiky na 1. stupni ZŠ

Na českém trhu existuje relativně široká nabídka ucelených sad učebnic pro výuku matematiky. Pro 1. stupeň je doložka Ministerstva školství mládeže a tělovýchovy udělena těmto nakladatelstvím (schvalovací doložka – březen 2015): Alter; Didaktis; Fraus (Hejného metoda, Matematika se Čtyřlístkem); Klett; Nová škola Brno, s.r.o.; Nová škola, s.r.o.; Prodos; Prometheus; SPN a.s.; Studio 1+1. Je v kompetenci nakladatelství, zda použije kombinace učebnic, pracovních sešitů či pracovních učebnic. Učebnice zpravidla poskytuje škola a pracovní sešity a pracovní učebnice si žáci kupují a potom jim zůstávají.

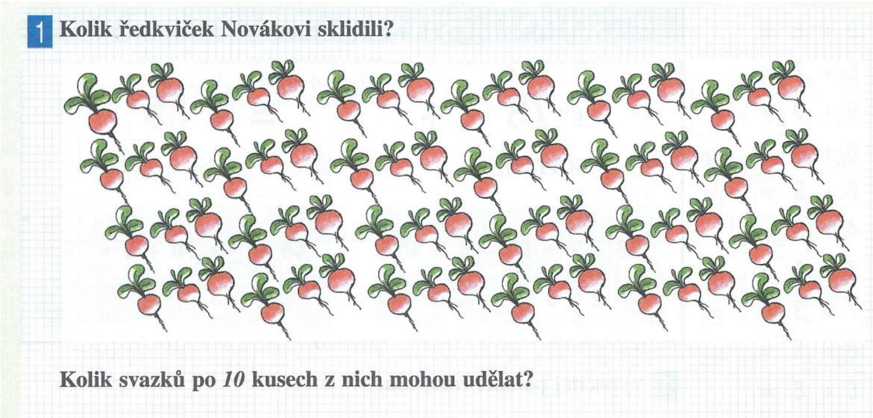
7.2 Analýza učebnic nakladatelství Prodos

Nakladatelství Prodos oficiálně přichází s dělením se zbytkem ve 3. ročníku pomocí zavedení algoritmu. Při podrobnější analýze učebnic je možné najít propedeutické úlohy dříve. Mezi další typ úloh patří úlohy procvičovací a aplikace. Učebnice jsou koncipovány tak, že k primárnímu zadání úlohy je připojen i komentář či rozšiřující otázka v poznámce. Tato nadstavba může sloužit k naplnění prvku individualizace ve vzdělávání, kdy učitel může vyzvat rychlejší žáky k řešení těchto úloh. Zároveň mohou některé rozšiřující otázky učitele inspirovat k vlastní invenci a přemýšlení nad modifikací pro danou situaci.

První propedeutickou úlohu je možné najít už v 1. ročníku – Prodos/U/I/2. díl/s. 3, kdy mají žáci přiřazovat zimní rukavice do párů (obr. 1). Jedna rukavice je zde navíc. Záměrem určitě není sestavení numerické úlohy na dělení se zbytkem, ale spíše získání zkušenosti, že mohou nastat situace, kdy nějaký element zbude. Podrobnější komentář k této úloze uvádím v příloze (příloha 2).

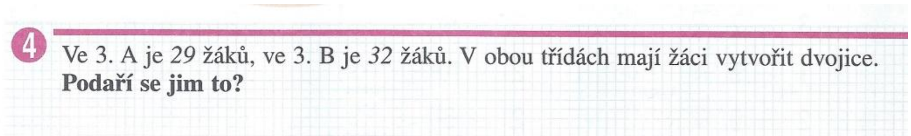
Obrázek 1- Prodos/U/I/2. díl/s. 3

Další propedeutická úloha je zařazena do 2. ročníku – Prodos/U/II/3. díl/s. 3. V tomto případě se jedná o graficky zadanou úlohu, kdy žáci mají zjistit, kolik svazků ředkviček po deseti kusech z daného množství mohou udělat. Vyjde jim konkrétní počet svazků a 2 ředkvičky zbudou.



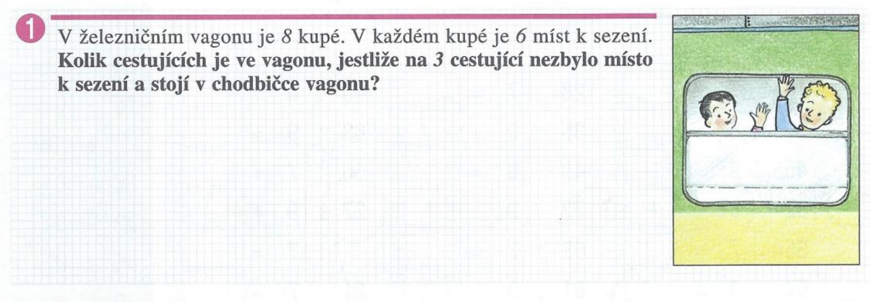
Obrázek 2 - Prodos/U/II/3. díl/s. 3

Ještě před zavedením dělení se zbytkem jsou ve 3. ročníku zařazeny úlohy propedeutického charakteru. Jelikož tyto úlohy vnímám jako velmi důležité pro následné zavádění a pochopení dělení se zbytkem, věnovala jsem se podrobnější analýze úloh tohoto typu. Některé z těchto úloh uvádím v příloze této práce. (přílohy 2-36) Pro přehled a přehlednost vypisuji v této kapitole pouze typy úloh zaměřené na určitou oblast dělení se zbytkem. Mezi propedeutické úlohy v učebnicích pro 3. ročník patří Prodos/U/III/1. díl/s. 17, kde je úkolem vytvořit z daného počtu žáků dvojice.

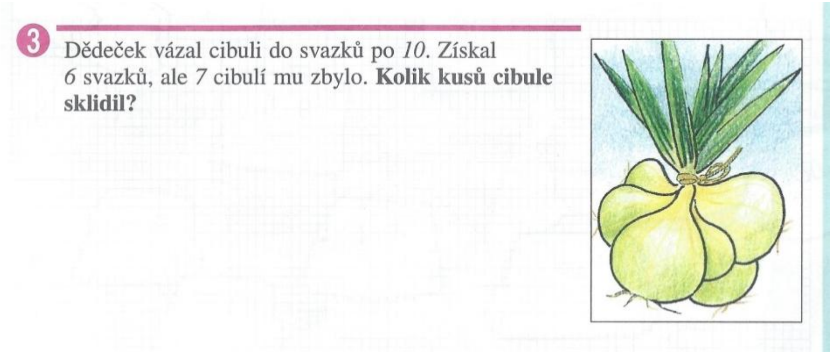


Obrázek 3 - Prodos/U/III/1. díl/s. 17

Dále Prodos/U/III/1. díl/s. 60 – v tomto případě se úloha řeší principem zkoušky, která se provádí při dělení se zbytkem a poslední úlohou tohoto typu je Prodos/U/III/1. díl/s. 61 - kdy se úloha opět řeší pomocí zkoušky.

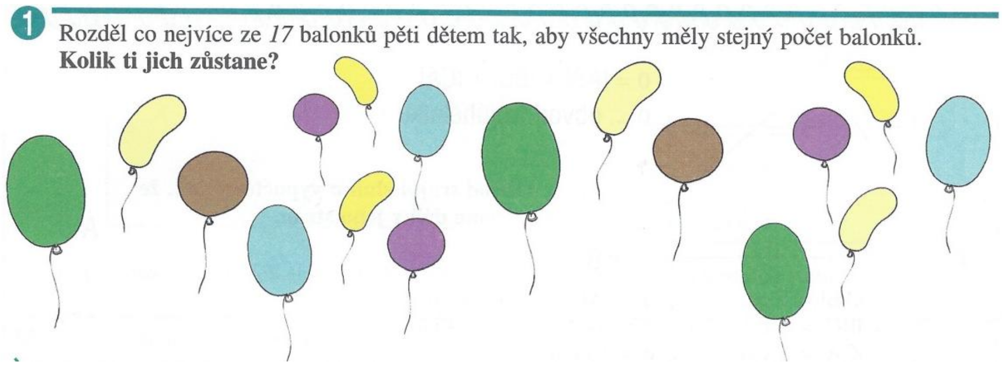


Obrázek 4 - Prodos/U/III/1. díl/s. 60



Obrázek 5 - Prodos/U/III/1. díl/s. 61

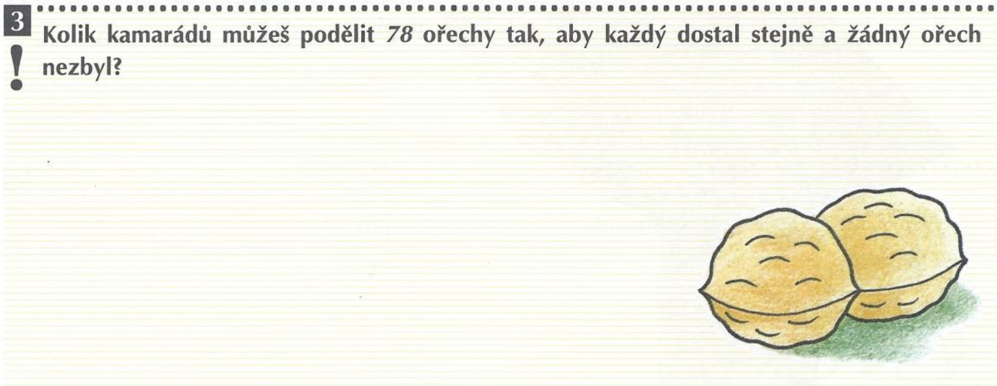
K zavedení dělení se zbytkem dochází ve 3. ročníku ve 3. dílu učebnice Prodos/U/III/3. díl/s. 52. Jedná se o kapitolu Dělení se zbytkem (s. 52-58). Dělení se zbytkem je zde nejprve ukázáno na slovní úloze, kdy mají žáci rozdělit co nejvíce ze 17 balonků pěti dětem tak, aby všechny měly stejný počet balonků. Balonky jsou graficky znázorněny, což je důležité pro lepší představu žáků. Tuto úlohu s komentářem jsem také zařadila do přílohy. Zavádění dělení se zbytkem probíhá předložením vyřešené slovní úlohy, která je nejprve znázorněna na číselné ose, dále je ukázán výpočet, zápis, kontrola a odpověď. Řešení je předkládáno pomocí algoritmu, kdy se hledá nejbližší menší násobek dělitele. Následují úlohy numerické i slovní, kde se dělení se zbytkem vyskytuje.



Obrázek 6 - Prodos/U/III/3. díl/s. 52

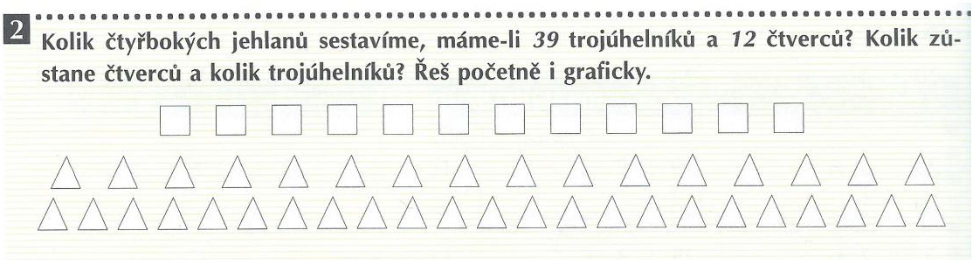
V této kapitole je vždy jedna strana věnována procvičení dělitele od 2 do 9. Oproti jiným analyzovaným učebnicím se u nakladatelství Prodos vyskytuje více slovních úloh, které jsou zadány tak, aby z nich žáci mohli vytvořit řešení podle zmíněného algoritmu. Některé úlohy jsou zasazeny do velmi zajímavého kontextu. V tomto oddílu nechybí ani numerické úlohy na procvičení. Vybrané úlohy s komentářem uvádím v příloze.

Ve 4. ročníku Prodos/U/IV/1. díl/s. 23 je slovní úloha, při které výsledek vyjde beze zbytku, ale mezivýpočty budou vycházet se zbytkem. Tato slovní úloha vede ke hledání více řešení a s tím souvisí i mnohé počítání.



Obrázek 7 - Prodos/U/IV/1. díl/s. 23

Na straně 30 je zopakován postup řešení při dělení se zbytkem a strany 31 a 32 jsou věnovány procvičování. Prodos/U/IV/1. díl/s. 32 je úloha propojující dělení se zbytkem s geometrií.



Obrázek 8 - Prodos/U/IV/1. díl/s. 32

Ve 2. dílu učebnice se dělení se zbytkem nevyskytuje příliš často, pouze na stranách 39 a 51. Ve 3. dílu Prodos/U/IV/3. díl/s. 56 dochází k aplikaci dělení se zbytkem při písemném dělení. To je zde představeno formou algoritmu za použití „dlouhého zápisu“ kdy se vždy číslice v neúplném podílu násobí s dělitelem a tento výsledek se odečte od daného dělence. Strany 56 a 57 se věnují procvičení písemného dělení.

Pamětné i písemné dělení se zbytkem se procvičuje i v 5. ročníku. Ubyla četnost slovních úloh a žáci látku procvičují většinou pouze numerickými úlohami.

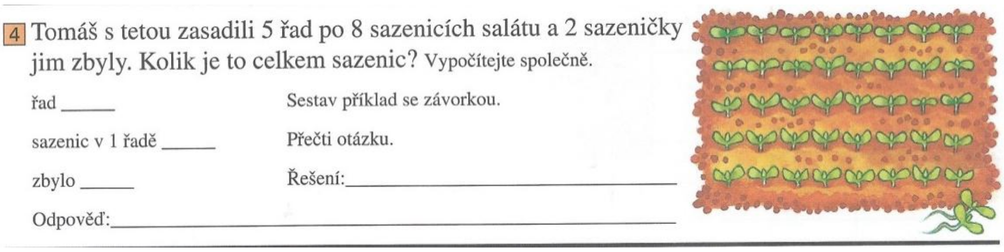
Autoři nakladatelství Prodos se více věnují propedeutice dělení se zbytkem a dalo by se říct, že častěji zařazují slovní úlohy. Lze v tom vidět snahu o zasazení operace dělení se zbytkem do kontextu při praktickém využití v každodenních činnostech. Žáci se tak mohou setkávat přímo se situacemi, kde by se mohlo dělení se zbytkem využít. Vyžaduje to po nich čtení zadání s porozuměním, a to konkrétně v tom, že musí rozlišit jednotlivá čísla a správně sestavit numerickou úlohu. V učebnicích nechybí ani numerické úlohy, které vedou k procvičení probírané látky.

7.3 Analýza učebnic Nakladatelství Alter

Nakladatelství Alter se dělení se zbytkem věnuje velmi podrobně. Najdeme zde oddíly, které čítají několik stran za sebou, jsou věnovány důslednému nácviku předloženého algoritmu. Dělení se zbytkem je zaváděno ve 3. ročníku, kde je mu věnována celá kapitola. Následně se s dělením se zbytkem pracuje až do 5. ročníku, nejčastěji v podobě úloh zformátovaných do „sloupečků“. Z hlediska zaměření by se úlohy daly klasifikovat jako:

- úlohy propedeutické
- úlohy zaváděcí
- úlohy procvičovací
- úlohy, při kterých dochází k aplikaci

V pracovní učebnici pro 2. ročník Alter/PU/II/7. díl/s. 3, 9, 14, 20, 25 najdeme propedeutické úlohy, kdy je hlavním záměrem procvičení řad násobků a následné hledání nejbližších menších násobků. Toto cvičení připravuje žáky na stěžejní dovednost v rámci koncepce dělení se zbytkem autorů učebnic nakladatelství Alter. Další úlohou s propedeutickým charakterem je slovní úloha, která se řeší principem zkoušky u dělení se zbytkem Alter/U/II/7. díl/s. 30.


4 Tomáš s tetou zasadili 5 řad po 8 sazenicích salátu a 2 sazeničky jim zbyly. Kolik je to celkem sazenic? Vypočítejte společně.

řad ______

sazenic v 1 řadě ______

zbylo ______

Sestav příklad se závorkou.

Přečti otázku.

Řešení: ______

Odpověď: ______

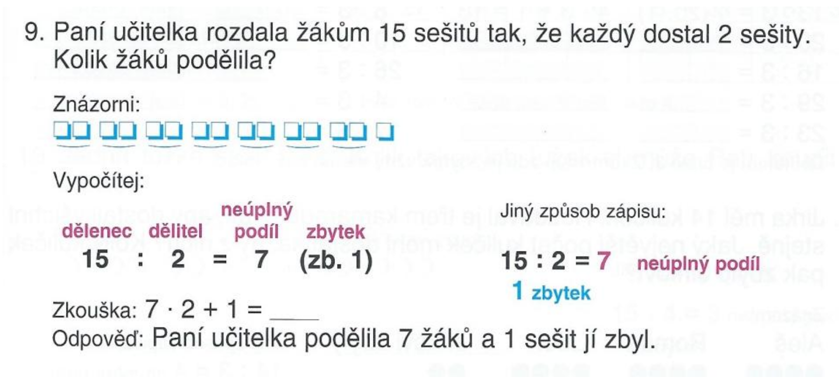
Obrázek 9 - Alter/U/II/7. díl/s. 30

K propedeutice dělení se zbytkem by se daly řadit i úlohy Alter/U/III/s. 44, 47, které najdeme v učebnici ve 3. ročníku. Jedná se o úlohy, ve kterých jde o postupné odčítání. Avšak autoři dále nevyužívají tuto strategii jako možnost řešení dělení se zbytkem. Domnívám se, že ji zvolili spíš jako procvičení operace odčítání.


19. Od čísla 100 odčítej postupně číslo 5 až k číslu 0.

Obrázek 10 - Alter/U/III/s. 44

Dále se dělení se zbytkem objevuje v učebnici pro 3. ročník na straně 112, kde začíná kapitola Dělení se zbytkem. Jedná se o strany 112-122, které jsou téměř výhradně věnovány zavádění dělení se zbytkem a následnému procvičování. Dalo by se říct, že strany vypadají totožně, postupně se prostřídají čísla 2-9 na pozici dělitele. Je zde představen algoritmus, kdy se nejprve v tabulce zvýrazňují násobky čísla (dělitele), které je na konkrétní straně procvičováno, a následně se hledají nejbližší menší násobky k dělenci. Následující cvičení jsou většinou zaměřena na numerické procvičení algoritmu tzv. “sloupečky“ a potom se tu najdeme i slovní úlohy. Zpočátku jsou slovní úlohy vzorově řešeny např. Alter/U/III/s. 113, aby žáci viděli přesný postup řešení. Některé ze slovních úloh, které autoři zařadili do této kapitoly, by byly k rozšíření a následné diskuzi ve třídě. Dělení se zbytkem je ještě zařazeno v jednotlivých cvičeních na stranách 127, 138, 154. Na straně 158 je ještě zmínka o tom, že kalkulačky nezobrazují výsledek ve tvaru neúplného podílu a zbytku v závorce.


9. Paní učitelka rozdala žákům 15 sešitů tak, že každý dostal 2 sešity. Kolik žáků podělila?

Znázorni:

Vypočítej:

dělenec		dělitel		neúplný podíl	zbytek
15	:	2	=	7	(zb. 1)

Jiný způsob zápisu:

15 : 2 = 7 neúplný podíl
1 zbytek

Zkouška: 7 · 2 + 1 = ____

Odpověď: Paní učitelka podělila 7 žáků a 1 sešit jí zbyl.

Obrázek 11 - Alter/U/III/s. 113

Hned na začátek učebnice pro 4. ročník autoři zařazují numerické a slovní úlohy na dělení se zbytkem. Cílem je zopakování tohoto algoritmu po prázdninách a procvičení pro zavádění písemného dělení jednociferným dělitelem. Strany 23-26 jsou věnovány písemnému dělení. Úlohy z této kapitoly patří do kategorie aplikace, protože žák zde uplatní dovednost dělit se zbytkem. Písemné dělení jednociferným dělitelem je žákům předloženo jako algoritmus. Na začátku každé strany v tomto oddíle je předložena jedna vyřešená numerická úloha. Obtížnost úloh postupně roste, nejprve vychází výsledek i všechny dílčí kroky beze zbytku, na další straně úloha sice vyjde beze zbytku, ale dílčí kroky zbytek obsahují, dále vyjde výsledek se zbytkem a naposledy je první cifra dělence menší než dělitel, proto je pro řešení potřeba použít dvojciferné číslo. Součástí vzorově řešených úloh je i odhad výsledku, kdy je žák veden k tomu, aby dělence zaokrouhlil a úlohu pamětně vyřešil.

Ve 4. ročníku dále v učebnici jsou zařazeny úlohy procvičovací Alter/U/IV/s. 27, kdy mají žáci dělit číslo 1000 postupně čísly 2-9.

51. Děl postupně čísla: a) od 10 do 20 třemi (šesti),
b) od 20 do 30 čtyřmi (osmi),
c) od 40 do 50 pěti (šesti, devíti).

Obrázek 12 - Alter/U/IV/s. 27

K procvičování slouží i velké množství numerických cvičení, která jsou průběžně řazena od strany 51 do strany 150. V každém z těchto cvičení je 5-24 numerických úloh pro písemné i pamětné dělení se zbytkem. Žáci mají vyřešit, provést zkoušku a tvořit slovní úlohy.

V 5. ročníku se vyskytuje pamětné dělení se zbytkem, písemné dělení jednociferným dělitelem a nově se zavádí i písemné dělení dvojciferným dělitelem. Předpokládá se, že žáci mají pamětné dělení zautomatizováno a mohou tak řešit obtížnější úlohy. I v tomto ročníku jsou úlohy na dělení se zbytkem zařazeny průběžně.

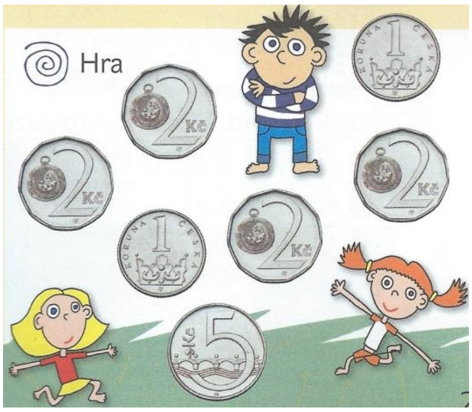
Autoři učebnic nakladatelství Alter si uvědomují důležitost pamětného dělení se zbytkem. Považují ho za výchozí bod k písemnému dělení, ať jednociferným či dvojciferným dělitelem. Toto jejich přesvědčení dokládá i velké množství úloh, které se problematikou dělení se zbytkem zabývají. Učivo je rozděleno do kapitol a jednotlivé kapitoly obsahují téměř výhradně úlohy, které se věnují dané oblasti. To může vést k tomu, že žák nebude přemýšlet o tom, jakým způsobem bude úlohu řešit a pro řešení použije jednu a tu samou strategii v rámci celé kapitoly. Pokud si učitel zvolí cíl naučit žáky rychlému počítání, tyto učebnice mu v tom mohou pomoci, protože v nich nalezne spousty úloh. Jestliže však hledá hlubší porozumění a prvky konstruktivismu, úlohy jsou v tomto případě až příliš uniformní a nevedou žáka k zásadním objevům.

7.4 Analýza učebnic Nakladatelství Fraus

Učebnice matematiky podle „Hejného metody" využívá v roce 2015 asi 20 % tříd v České republice (http://www.h-mat.cz/hejneho-metoda). Jedná se o ucelenou řadu učebnic, pracovních učebnic a pracovních sešitů. Dále autoři vypracovali i metodické příručky pro učitele, kde jsou rady a vysvětlení k jednotlivým úlohám pro učitele. Vzhledem ke konstruktivistickému pojetí je učebnice koncipována odlišně. V tradičním pojetí se na začátku používá odborný matematický jazyk a přes mateřský jazyk a zkušenost se dojde k užití. U Nakladatelství Fraus je tento postup opačný. Dělení se zbytkem není věnován souvislý oddíl několika stran, ale úlohy se v učebnicích a pracovních sešitech objevují průběžně. Je u nich patrná gradace. Úlohy by se daly klasifikovat jako:

- úlohy propedeutické
- úlohy, kde dochází k aplikaci
- úlohy, kde je potřeba mnohého počítání, vedoucímu k vyššímu cíli
- nestandardní úlohy

Úlohy propedeutické nalezneme v pracovních učebnicích pro 2. ročník a v učebnici pro 3. ročník a jedná se o užití (realitu). V učebnici pro 2. ročník nalezneme slovní úlohu Fraus/PU/II/1/s. 27, která se věnuje spravedlivému rozdělování peněžního obnosu nejprve mezi 3 děti (vyjde beze zbytku) a později mezi 2 děti a zde už vyjde zbytek. Úloha je žákům předložena bez vysvětlování a žáci sami zdůvodňují svá řešení.



Obrázek 13 - Fraus/PU/II/1/s. 27

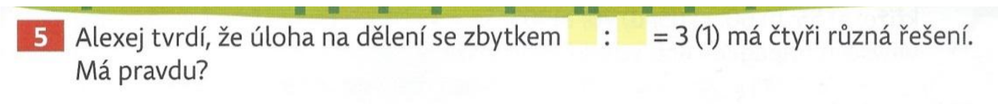
Další propedeutickou úlohou je úloha ze sémantického prostředí Dědy Lesoně Fraus/U/II/2/s. 28, kdy mají žáci rozdělit zvířátka do třech stejně silných družstev. V jednom případě to nelze a opět je na dětech, aby svá řešení odůvodnily.

Obrázek 14 - Fraus/U/II/2/s. 28

K propedeutickým úlohám se řadí i vývojový diagram, kde žáci řeší úlohu pomocí postupného odčítání. Právě tato metoda je jednou z řešitelských strategií při dělení se zbytkem. K vývojovému diagramu se autoři ještě vrací a úlohu gradují užitím vyšších čísel a přidáním dalších podmínek.

Kapitolu dělení se zbytkem nalezneme Fraus/U/III/s. 88. V učebnici je vyřešena slovní úloha, kdy měla Monika spravedlivě rozdělit 17 bonbónů mezi 5 spolužáků. Úloha je popsána na modelové situaci a jedná se o zkušenost. Je zde pouze ukázán zápis dělení se zbytkem a popsaná matematická terminologie, týkající se této problematiky. Nenajdeme tady žádný postup řešení, hledání nejbližších menších násobků. Pod touto slovní úlohou je cvičení, kde mají žáci řešit numerické úlohy, avšak k řešení mají použít žetony nebo jiné předměty. V metodické příručce se dočteme, že je velmi důležité, by žáci pochopili význam a propojení jednotlivých čísel u dělení se zbytkem. K tomu jsou následně průběžně voleny úlohy, které graficky vypadají jako „tradiční sloupečky" např. Fraus/U/III/ s. 94, ale na rozdíl od procvičování algoritmu, kdy se hledá pouze neúplný podíl a zbytek, v úlohách tohoto nakladatelství žáci zjišťují i velikost např. dělence, dělitele a hledají, kdy mají zadané úlohy jedno, více nebo nekonečně mnoho řešení.

Tyto úlohy vedou k odhalování zákonitostí a formulování pravidel. Úlohy jsou zadávány i formou nějakých tvrzení, kdy mají žáci ověřit, zda je tvrzení správné Fraus/U/III/ s. 95.


5 Alexej tvrdí, že úloha na dělení se zbytkem ___ : ___ = 3 (1) má čtyři různá řešení. Má pravdu?

Obrázek 15 - Fraus/U/III/ s. 95

Ve 3. ročníku žáci používají kromě učebnice i pracovní sešity, kde nalezneme další úlohy s dělením se zbytkem. U těchto úloh se žáci opírají o argumenty, které formulují mateřským jazykem (nepoužívají matematické definice).

Dělení se zbytkem nalezneme i ve 4. ročníku. Nejprve jsou zde numerické úlohy, kde se zjišťuje podíl a zbytek; dále dělitel a zbytek; dělenec a zbytek. Fraus/U/IV/ s. 17, 18, 19. Jedná se o gradovanou sérii úloh, kde je cílem si znovu uvědomit vztahy mezi jednotlivými čísly. Porozumění těmto vazbám kvalitativně odliší schopnost řešit úlohy svým postupem, kdy žák bude rozumět jednotlivým krokům a naučeným algoritmem.

50 Přepiš do sešitu a doplň chybějící čísla. Které úlohy mají více řešení?

13 : 8 = ☐ (☐)	17 : 2 = ☐ (☐)	15 : ☐ = 3 (☐)	☐ : 6 = ☐ (1)
17 : 5 = ☐ (☐)	30 : 4 = ☐ (☐)	29 : ☐ = 4 (☐)	☐ : 6 = ☐ (2)
19 : 4 = ☐ (☐)	48 : 5 = ☐ (☐)	41 : ☐ = 5 (☐)	☐ : 6 = ☐ (3)
21 : 3 = ☐ (☐)	25 : 3 = ☐ (☐)	25 : ☐ = 4 (☐)	☐ : 6 = ☐ (4)

Obrázek 16 - Fraus/U/IV/ s. 17

Zvládnutí dělení se zbytkem je podmínkou k písemnému dělení jednomístným číslem, které najdeme Fraus/U/IV/ s. 36.

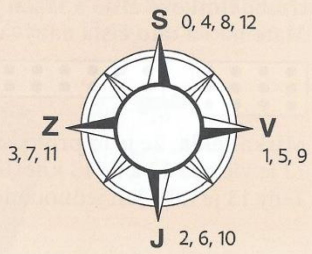
2 Najdi dvě po sobě jdoucí čísla, jejichž součet je dělitelný číslem 7 beze zbytku. (Taková jsou například čísla 17 a 18, neboť 17 + 18 = 35 a 35 : 7 = 5 (0).) Hledej více řešení. Hledej co největší řešení.

Obrázek 17 - Fraus/U/IV/ s. 36

U písemného dělení jednociferným číslem je v učebnici předložen algoritmus, nicméně v metodické příručce je uvedeno, že použití tohoto algoritmu není závazné a pokud má učitel předchozí dobré zkušenosti s nácvikem písemného dělení, může využít svůj způsob. Zde je již užíván odborný jazyk.

V učebnici pro 4. ročník jsou dále zařazeny úlohy, které vyžadují mnohé počítání a u kterých žák odhaluje nějaké pravidelnosti. Setkáváme se zde i s algebrogramy, které jsou ve tvaru dělení se zbytkem Fraus/U/IV/ s. 37. Některé slovní úlohy jsou formulovány nestandardně, kdy kromě vyřešení numerické úlohy, musí žáci výsledky třídit podle stanovených kritérií Fraus/U/IV/ s. 73, 74.

Chodíme kolem růžice světových stran
a píšeme čísla 0, 1, 2, 3, 4,...
K severu **S** napíšeme 0,
k východu **V** napíšeme 1,
k jihu **J** napíšeme 2,
k západu **Z** napíšeme 3,
opět jsme u **S** a napíšeme 4,
přejdeme k **V** a zapíšeme 5 a tak dále.

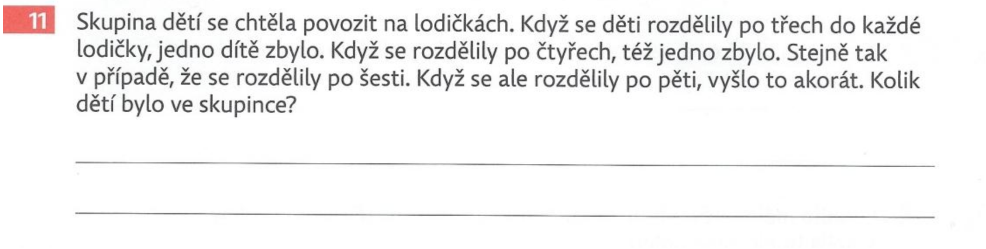


8 Řekni, kam padne číslo 20 a kam 22. Řekni co největší číslo, které padne na S, na V, na J a na Z.

Obrázek 18 - Fraus/U/IV/ s. 74

V rámci nestandardních úloh dochází k aplikaci a rozšíření číselného oboru. V pracovním sešitě je ve 4. ročníku věnováno pár úloh písemnému dělení jednomístným číslem Fraus/PS/IV/1.díl/s. 24 a za zmínku stojí i dvě slovní úlohy v kapitole Žáci sobě.

Fraus/PS/IV/2. díl/s. 44. Úlohy vymysleli žáci a jsou vymyšleny nápaditě, kdy úkolem je zjistit hodnotu dělence na základě informací o děliteli a zbytku.


11 Skupina dětí se chtěla povozit na lodičkách. Když se děti rozdělily po třech do každé lodičky, jedno dítě zbylo. Když se rozdělily po čtyřech, též jedno zbylo. Stejně tak v případě, že se rozdělily po šesti. Když se ale rozdělily po pěti, vyšlo to akorát. Kolik dětí bylo ve skupince?

Obrázek 19 - Fraus/PS/IV/2. díl/s. 44

V 5. ročníku se k již zmíněným typům úloh přidává ještě dělení dvoumístným číslem Fraus/U/V/ s. 25, kdy je v učebnici předložen algoritmus. Pro dělení dvoumístným číslem je potřeba v dílčích krocích využívat dělení se zbytkem. Problematice dělení se zbytkem jsou věnovány i další úlohy, ve kterých je potřeba hodně výpočtů a které opět vedou k nalezení nějakého pravidla Fraus/U/V/s. 35, kde se do tabulky doplňují hodnoty zbytků. Z dalších úloh, kde se dělení se zbytkem vyskytuje, můžeme jmenovat prostředí Neposedů Fraus/U/V/s. 43. Na vynechaná místa v úloze žáci doplňují čísla z nabídky. Díky tomu je zde omezený počet možností a žáci mohou zažít radost z úspěchu, když se jim podaří zadaná čísla správně dosadit. Pokud si navíc uvědomí, že zbytek nemůže být stejný nebo větší než dělitel, ušetří si práci a čas. V učebnici jsou ještě další úlohy s dělením se zbytkem zařazeny mezi ostatní numerické úlohy s operacemi sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Obrázek 20 - Fraus/U/V/s. 43

Propedeutické úlohy i první seznámení se s problematikou dělení se zbytkem jsou v učebnicích nápaditě motivovány. Místem, ve kterém se tato řada učebnic odlišuje, je nezavedení algoritmu. Úlohy, které jsou předkládány, jsou formulovány různým způsobem tak, aby zjišťovaly nejen neúplný podíl a zbytek, ale i dělence a dělitele. Co se týče četnosti, úlohám, které se věnují tématu dělení se zbytkem, není dáno tolik prostoru jako v ostatních učebnicích. Nenajdeme zde desítky totožných cvičení, které by se věnovaly dělení se zbytkem. Ani zde nenajdeme příliš mnoho slovních úloh. Pokud však učitel nebude vynechávat úlohy, které vyžadují mnohé počítání, žáci vyřeší úloh dostatek. Nevýhodu vnímám v grafické stránce, kdy je dělení se zbytkem tak trochu „zapadlé“ mezi výraznějšími úlohami z jiných prostředí. A na první pohled v učebnici nevypadá tak atraktivně a lákavě k řešení.

7.5 Shrnutí

Při analýze učebnic Prodos jsem našla 352 numerických a 25 slovních úloh, v učebnicích Alter 819 numerických a 57 slovních úloh a v učebnicích Fraus nalezneme 252 numerických a 35 slovních úloh zabývajících se dělením se zbytkem. Na základě těchto čísel by se zdálo, že nejvíce se tomuto tématu věnuje nakladatelství Alter, ale nesmíme zapomenout na to, že některé úlohy, zejména u nakladatelství Fraus, vyžadují mnohé počítání, než se žáci doberou výsledku. Tento počet dílčích kroků však z učebnice nevyčteme. Počet vyřešených úloh se bude u žáků lišit. Někdo bude potřebovat vyřešit desítky úloh, než objeví nějakou zákonitost, někomu bude stačit vyřešit úlohy tři. Proto je nemůžeme do tohoto souhrnu uvést. Tento výčet je pouze kvantitativní a neodráží kvalitu jednotlivých úloh. Např. u některých úloh mají žáci hledat více řešení, což také vyžaduje další výpočty.

Při prostudování jsem se zamýšlela i nad smyslem jednotlivých, zejména slovních úloh. Snažila jsem se zúročit znalosti a dovednosti nabyté během studia na Pedagogické fakultě a hledala jsem možnosti využití těchto úloh. Některé úlohy v učebnicích jsou zcela konstruktivistického charakteru a žáci v nich objevují různé vztahy a zákonitosti. Jiné úlohy jsou zařazeny v kapitolách, kde je předložen algoritmus a žáci je mají řešit uvedeným způsobem. Právě v těchto případech jsem se snažila formulovat si a modifikovat tyto úlohy tak, aby i v nich mohly být zařazeny prvky konstruktivismu. Jedním z důvodů, které mě k tomu vedly, představovalo zajímavé zadání těchto úloh, které ovšem byly využitelné pouze pro sestavení výpočtu dle algoritmu. Cítila jsem, že by stálo za to tyto úlohy rozšířit o otázky, které by vedly ke hledání více řešení, propojení s dalšími oblastmi matematiky atd. Při této analýze jsem tak komentovala a rozšiřovala některé úlohy, zejména propedeutické a slovní. Tato práce mě velmi bavila, protože jsem při hledání dalšího využití těchto úloh pronikala do matematicky zajímavých situací. Některé z okomentovaných a rozšířených úloh přikládám v kapitole příloh. (příloha 2-36)

8 Individuální rozhovory s dětmi

Diagnostický test byl části žáků zadáván na konci školního roku 2012/2013 (3. ročník) a druhé části na začátku školního roku 2014/2015 (4. ročník). Žáci byli ze tříd, kde se matematika vyučovala podle metody Hejného. Testování probíhalo individuálně, formou předložení testu a diskuze o tom, jak dítě danou úlohu řešilo. Často při těchto rozhovorech docházelo k objevení různých vztahů a závislostí v rámci dělení se zbytkem. Od začátku byl diagnostický test koncipován spíše pro kvalitativní výzkum a cílem bylo zjistit, jaké řešitelské strategie žáci pro určité typy úloh volí. Z tohoto důvodu i vzhledem k časové náročnosti, kdy každý rozhovor trval přibližně 20-45 minut, není zkoumaný vzorek velký.

8.1 Jak vznikly testy a rozhovory – „Kritická místa ve výuce“

Testy a rozhovory vznikly v rámci projektu „Kritická místa ve výuce“, který se zabýval problematickými oblastmi matematiky. Jednou z nich bylo právě dělení se zbytkem. Testové úlohy se získaly tím způsobem, že se vycházelo z učebnic Nakladatelství Alter. Úlohy byly záměrně formulovány tak, aby se tvářily tak, že je děti, které se učí podle Nakladatelství Alter, znají. Zároveň šlo o to, vymyslet kontexty, které v učebnicích Nakladatelství Alter nejsou, jedná se o úlohy autorské.

8.2 Vzorové řešení diagnostického testu

Jednou z dovedností, kterou by měl učitel ovládat je analýza zadávaných úloh a zamýšlení se nad různými možnostmi řešení, ale i nad situacemi, kde by žáci mohli chybovat. Pro tento diagnostický test jsem vypracovala vzorové řešení, ve kterém odhaduji možné řešitelské strategie a problémy, které by mohly při řešení nastat.

1. Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?

Možné řešitelské strategie:

- numerický postup 18 : 5 = 3 (3) -> jedno řešení
- numerický postup, kdy se Adam přidá ke spolužákům 18 : 6 = 3 -> 1 řešení
- metoda postupného odčítání 18 – 5 = 13; 13 – 5 = 8; 8 – 5 = 3, pokud bude žák postupovat tímto způsobem, objeví všechna možná řešení, ale nemusí si uvědomit, že je možné je použít

- grafické metoda přiřazování – i zde, pokud bude přiřazovat postupně, najde všechna řešení, ale opět si nemusí uvědomit, že se tyto „dílčí“ výsledky dají použít jako plnohodnotná řešení

Lze předvídat:

- různé pochopení zadání slovní úlohy
- případnou numerickou chybu při výpočtu
- případnou chybu z nepozornosti při grafickém řešení

2. Doplň do dělení se zbytkem chybějící čísla:

a)	**9 : 2 = _ (_)**	9 : 2 = 4 (1)		
	29 : 4 = _ (_)	29 : 4 = 7 (1)		
	49 : 6 = _ (_)	49 : 6 = 8 (1)		

Možné řešitelské strategie:

- grafické řešení u nižších čísel u žáků, kteří potřebují ještě znázornění
- řada násobků
- řešení zpaměti

Lze předvídat:

- případnou chybu v řadě násobků
- případnou chybu při pamětném řešení

b.	**14 : _ = 2 (_)**	14 : 7 = 2 (0)	14 : 6 = 2 (2)	14 : 5 = 2 (4)
	17 : _ = 3 (_)	17 : 5 = 3 (2)		
	24 : _ = 4 (_)	24 : 6 = 4 (0)	24 : 5 = 4 (4)	

Možné řešitelské strategie:

- využití majákového spoje např. 2 * 7 = 14
- řada násobků

Lze předvídat:

- že žáci nebudou hledat další řešení a jako první zvolí řešení, které vychází beze zbytku (v případech, kdy je to možné)
- při objevení dalších řešení nebudou respektovat, že zbytek by neměl být stejný nebo vyšší než dělitel (např. u úlohy 14 : _ = 2 (_) budou pokračovat v řešení dál 14 : 4 = 2 (6) atd.)

c.	**_ : 3 = 5 (1)**	16 : 3 = 5 (1)
	_ : 4 = 3 (1)	13 : 4 = 3 (1)
	_ : 6 = 3 (4)	22 : 6 = 3 (4)

Možné řešitelské strategie:

- princip zkoušky u dělení se zbytkem

Lze předvídat:

- problém s číslem zbytku – jestli přičíst nebo odečíst

3. Bětka zjistila, že když vydělíme číslo 26 třemi, zůstane nám zbytek 2. Jaký zbytek zůstane po dělení čísla 25? Zdůvodni.

Možné řešitelské strategie:

- numerické řešení 25 : 3 = 8 (1)
- uvědomění si souvislosti velikosti dělence a zbytku při stejném děliteli, když 26 : 3 = _ (2), pak 25 : 3 = _ (1)

Lze předvídat:

- preferenci numerického řešení

4. Vyřeš algebrogram:

AA : 2 = B (A) 11 : 2 = 5 (1)

Možné řešitelské strategie:

- metoda pokusu a omylu a následné systematické dosazování

11 : 2 = 5 (1)

~~22 : 2 = 11~~

~~33 :2 = 16 (1)~~ -> podíl je už dvojciferné číslo a dále by se zvyšoval

Lze předvídat:

- zapomenutí na podmínku algebrogramů, že jedno písmeno = jedna číslice, a pokračování v řešení, i když B už nebude jednociferné číslo

AA : 6 = B (A) 33 : 6 = 5 (3)

Možné řešitelské strategie:

- metoda pokusu a omylu a následné systematické dosazování

~~11 : 6 = 1 (5)~~

~~22 : 6 = 3 (4)~~

33 : 6 = 5 (3)

~~44 : 6 = 7 (2)~~

~~55 : 6 = 9 (1)~~

~~66 : 6 = 11~~ -> podíl je už dvojciferné číslo a dále by se zvyšoval

Lze předvídat:

- zapomenutí na podmínku algebrogramů, že jedno písmeno = jedna číslice, a pokračování v řešení, i když B už nebude jednociferné číslo
- po dvou prvních neúspěšných pokusech změnu řešitelské strategie a tím třeba ještě oddálení najití správného výsledku

8.3 Řešení dětí

Vyhodnocování testu probíhalo ve dvou rovinách. Nejprve jsem zanalyzovala řešení celého testu z pohledu jednoho žáka. V tomto případě jsem hledala souvislosti mezi řešením jednotlivých úloh a jako nejzajímavější se mi jevilo postupné objevování vlastní řešitelské strategie. Tomu přispívalo i koncipování jednotlivých úloh, které byly např. ve 2. cvičení rozděleny do třech bloků po třech úlohách s postupnou gradací. Žáci měli možnost postupně přicházet na vlastní způsob řešení a často se potvrdilo, že třetí ze série úloh už řešili rychleji. Další rovinou vyhodnocování testu byla analýza jednotlivých úloh a v tomto případě výčet použitých řešitelských strategií a jejich četnosti.

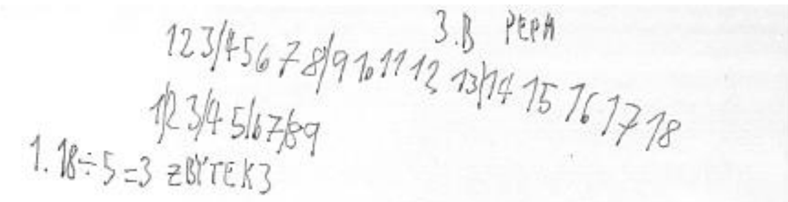
8.3.1 Řešení diagnostického testu z pohledu žáka

Žáci pro řešení úloh volili rozmanité strategie a dalo by se říct, že každý test je naprostý originál. V této části bych ráda představila postupy řešení, které byly odlišné od tradičního pojetí výuky matematiky, a dále bych zmínila některé případy, kdy žáci učinili pro sebe důležitý objev.

Pepovo řešení

Úloha 1.

Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?

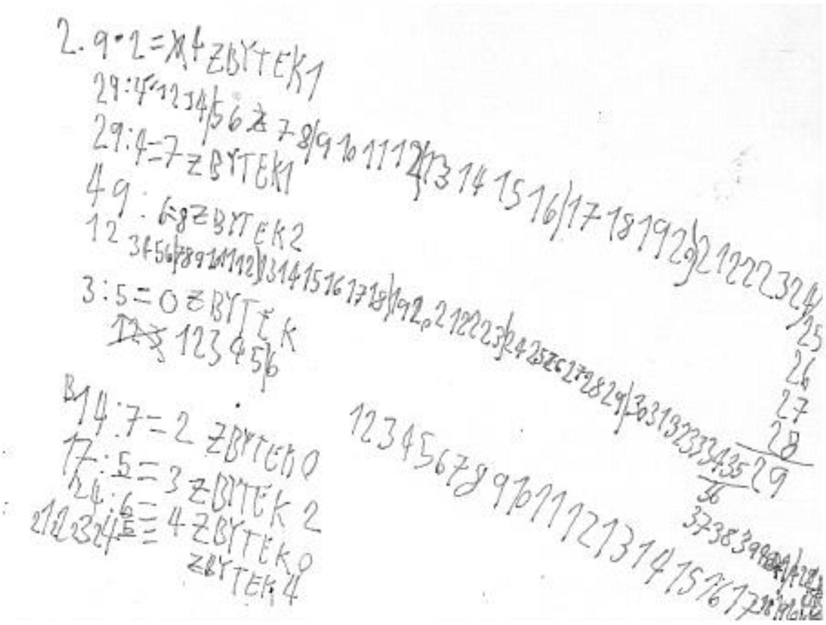


Obrázek 21 - Pepa U1

Pro řešení slovní úlohy s bonbony zvolil žák tento postup řešení. Nejprve si napsal čísla od 1 do 18 a potom od konce tvořil skupinky po pěti, které graficky odděloval. Princip vypadá jako metoda postupného odčítání, ale prakticky u žáka neprobíhala žádná operace odčítání. Z řešení je patrné, že dospěl ke správnému výsledku. Aby bylo řešení z jeho pohledu kompletní, dopsal ještě pod grafické řešení numerické. Z hlediska času byl tento způsob řešení jedním z nejrychlejších.

Úloha 2.

a. **9 : 2 = _ (_)**
   29 : 4 = _ (_)
   49 : 6 = _ (_)



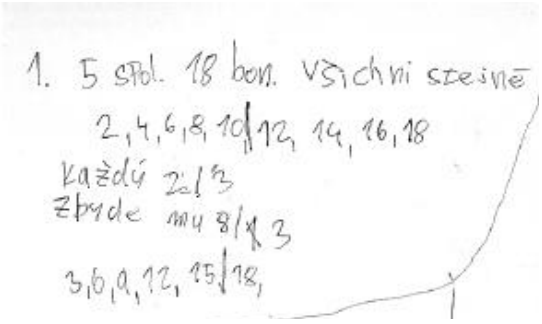
Obrázek 22 - Pepa U2

Žák využívá k řešení stejnou strategii jako u první úlohy. Napíše si všechna čísla od 1 do výše dělence a potom vytváří graficky skupinky od největšího čísla podle velikosti dělitele. Čísla, která už nevytvoří „celou skupinku", tvoří zbytek. Pro menší čísla je tato strategie vhodná, protože je velmi názorná. U větších čísel je zdlouhavé vypisovat všechna čísla a lehce může dojít k chybám, které pramení z přehlédnutí se. Zároveň řešení s vyššími čísly je nepřehledné. Je to patrné i v žákově řešení, kdy mu vyjde chybný výsledek 49 : 6 = 8 zbytek 2.

Aniččino řešení

Úloha 1.

Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?



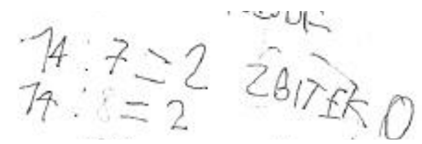
Obrázek 23 - Anička U1

Ze zápisu je vidět, že žákyně řešila úlohu pomocí řady násobků. Nejdřív volila násobky čísla 2. V řadě je graficky znázorněno oddělení čísel 10 a 12. Žákyně volila metodu přiřazování, každému spolužákovi dávala po dvou bonbonech, z toho vyplývá řada násobků 2. Tímto způsobem dostal každý spolužák 2 bonbony. Zbyla tedy čísla 12, 14, 16, 18, která už nebyla schopna rozdělit mezi 5 podílníků. Určila je jako zbytek. V této chvíli však zapomněla na to, že bonbony rozdávala po 2, tudíž číslo jako zástupný znak obsahoval 2 bonbony. A určila, že Adamovi zbyly 4 bonbony. Ve skutečnosti však Adamovi zbylo 8 bonbonů a mohl ještě každému spolužákovi 1 bonbon dát. Po diskutování nad tím, jak na své řešení přisla, píše, že Adamovi zbude 8 bonbonů. Hledá ještě řešení, kdy bude chtít Adam rozdat co nejvíce bonbonů. V tomto případě píše řadu násobků 3. Graficky oddělí 15 a 18. Každý spolužák dostane 3 bonbony a 3 bonbony zbudou. Při analýze videa jsem si uvědomila, že hned to první řešení, které žákyně předložila, bylo správné, protože v zadání nebylo napsáno nic o tom, že by Adam chtěl rozdat co nejvíce bonbonů. Proto pokud každý spolužák dostal 2 bonbony a 8 zbylo, řešení je platné. Zde si uvědomuji, jak jsem při diskuzi žákyni vedla k tomu, aby našla řešení, které jsem pokládala za jediné správné. Domnívám se, že jedním z důvodů, proč jsem při natáčení rozhovoru měla představu jediného správného řešení, může být to, že jsem se sama jako žákyně ve škole setkávala s jedním typem úloh, kdy pokud šlo o dělení se zbytkem, bylo vždy správné řešení, kdy byl podíl co největší a zbytek co nejmenší. Dnes vidím, že velmi záleží na formulaci úlohy a žáci i učitelé musí být pozornější.

Vaskovo řešení

Úloha 2.

b. 14 : _ = 2 (_)



Obrázek 24 - Vasko U2/b

14 : _ = 2 (_). Jako první řešení píše 14 : 7 = 2 (0). Na výzvu zkouší hledat další řešení tak, aby zbytek nebyl 0. Zkouší 14 : 8 = 2 (2), ale při kontrolní zkoušce, kdy počítá 2 * 8 = 16 zjistí, že výsledek nebyl správně. Zkouší 7 + 7 = 14 a zdůvodňuje, že je to jediné možné řešení, protože žádná jiná dvě čísla nedají dohromady 14. Žák v tomto případě zapomněl na zbytek, čímž si pro sebe formuloval úlohu řešitelnou pouze s jedním řešením.

Míšovo řešení

Úloha 1.

Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?

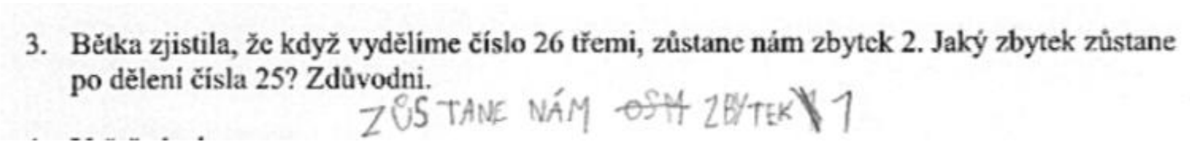
Žák pro řešení této slovní úlohy použil metodu postupného odčítání, kdy od dělence postupně odčítal číslo 5, což je hodnota dělitele, až se dostal k číslu 3, které představuje zbytek. Během odčítání si vždy po každém kroku zvedl jeden prst, aby měl přehled o tom, kolik bonbonů má každý žák. Své řešení nakonec formuloval větou: „Když si vydělíte 18 : 5, vyjde vám 3 a ještě se zbytkem 3."

Úloha 2.

a. 9 : 2 = _ (_)
29 : 4 = _ (_)
49 : 6 = _ (_)

Pro řešení úloh volil žák strategii, při které užíval postupnou řadu násobků. Řada násobků vždy byla dána velikostí dělitele. V úloze 29 : 4 = 7 (1) užil majákového spoje, kdy věděl, že 4 * 4 = 16, aby ušetřil čas a dále postupně přičítal číslo 4, až se dostal k číslu 28, které je nejbližší menší číslo dělitelné čtyřmi k 29.

Úloha 3.


3. Bětka zjistila, že když vydělíme číslo 26 třemi, zůstane nám zbytek 2. Jaký zbytek zůstane po dělení čísla 25? Zdůvodni.

ZŮSTANE NÁM ~~OSM~~ ZBYTEK 1

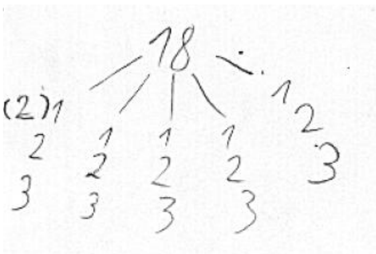
Obrázek 25 - Míša U3

Žák při řešení nevyužívá informace ze zadání slovní úlohy, kdy víme, že 26 : 3 = _ (2) a tedy zatím ještě nevidí provázanost mezi dělencem a zbytkem po odečtení stejného čísla. Proto úlohu řeší jako 25 : 3 a postupně si říká násobky 3, až dojde k číslu 24 a určí, že zbytek by vyšel 1. Ve psané formě odpovědi si můžeme všimnout přeškrtnutého slova osm. Důvodem je, že si sám žák uvědomil, že v zadání slovní úlohy se nás neptají na podíl, ale pouze na zbytek.

Járovo řešení

Úloha 1.

Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?



Obrázek 26 - Jára U1

Žák pro řešení úlohy užívá metodu přiřazování. Číslo 18 představuje počet bonbonů, které chce rozdělit pěti spolužákům. Proto si od čísla 18 udělá 5 čar, kterými znázorní spolužáky, kterým postupně přiřazuje bonbony. Zároveň u toho užívá metodu postupného odčítání, kdy komentuje 18 – 5 = 13 a ve schématu píše jedničky. Dále pokračuje 13 – 5 = 8 a píše dvojky. Poté 8 – 5 = 3, píše trojky a určí, že zbyly 3 bonbony. Jeho způsob řešení byl časově náročnější, ale nalezl správný výsledek. Z jeho komentovaného postupu bylo patrné, že při řešení jen náhodně nekombinuje čísla a matematické operace, ale své kroky zdůvodňuje.

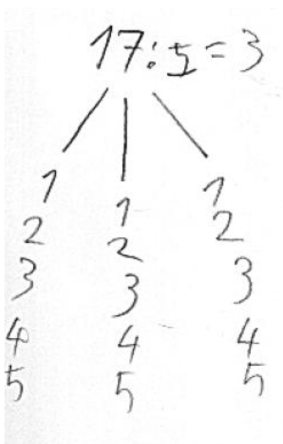
Úloha 2.

b. 14 : _ = 2 (_)
17 : _ = 3 (_)
24 : _ = 4 (_)

V sérii těchto úloh, kdy hledáme dělitele a zbytek, žák volí zajímavé postupy řešení. I když jsou úlohy založeny na stejném principu, žák vystřídá 3 řešitelské strategie. V nich je vidět jistá progrese, protože u poslední už nepotřebuje grafické znázornění a je schopný ji vyřešit pomocí říkání si řady násobků.

Úloha 14 : _ = 2 (_), 14 rozdělí na 7 a 7, tím mu vznikne 1 řešení. 14 : 7 = 2 (0) a na výzvu hledá další řešení. Odhaluje, že na místo dělitele můžeme dát dělitele od 1 do 7 a „dodělá“ se to zbytkem. Např. 14 : 6 = 2 (1) a uvažuje, že když by v tomto zadání snížil dělitele o 1, zbytek by se zvýšil o 1. Píše 14 : 6 = 2 a musí dopočítat zbytek. Zkouší 6 + 6 = 12 a říká, že je potřeba dopočítat 2. Jeho odhad se snižováním a zvyšováním byl logicky správně, ještě si ale neuvědomil, že koeficient zvyšování je dán velikostí dělitele, což znamená, že nemůže být menší než hodnota dělitele. Svou roli v tom mohla sehrát i numerická chyba, kdy určil, že 14 : 6 = 2 (1). Úlohu řešil dále a nakonec si uvědomil princip, který zde platí, že je potřeba dělitele snížit o 1 a zbytek se zvýší o 2. V tuto chvíli pro něj nebylo podstatné, že zbytek musí být menší než dělitel a potvrdil si svou domněnku, že na místo dělitele můžeme dát čísla od 1 do 7.

17 : _ = 3 (_). V tomto případě volí grafické řešení:



Obrázek 27 - Jára U2/b

Tato strategie je totožná s tou, kterou použil v 1. úloze, tedy metodou přiřazování a postupného odčítání.

24 : _ = 4 (_). V tomto případě už nepotřebuje grafické znázornění, ale říká si řadu násobků 4, vyřeší jako 24 : 5 = 4 (4), konstatuje, že dělitel může být od 1 do 5 a odhaduje, že zbytek by mohl být do 10.

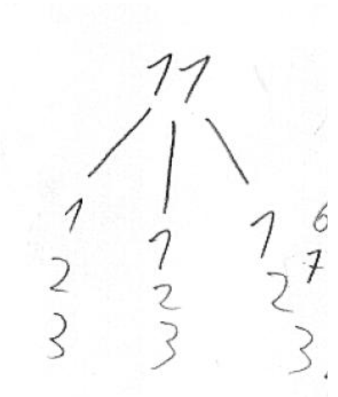
Ještě znatelnější posun udělal žák při řešení úloh ze série c.

Úloha 2.

c. _ : 3 = 5 (1)
_ : 4 = 3 (1)
_ : 6 = 3 (4)

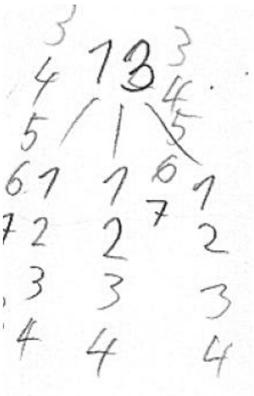
_: 3 = 5 (1). Žák si říká řadu násobků třech, konkrétně 3, 6, 9, 12, 15 => 5 násobků, protože 3 použil 5krát a píše řešení: 15 : 3 = 5 (1). Potom si však uvědomí, že v zadání figuruje i zbytek a od 15 odečte 1. Vyjde mu 14 : 3 = 5 (1). Zde se domnívám, že pro žáka mělo slovo zbytek význam ve smyslu, že se něco odčítá, proto zvolil tuto matematickou operaci. I přes dotaz, který ho měl nasměřovat k ověření daného výpočtu, obhajoval své řešení, které však nebylo správné.

_ : 4 = 3 (1). Tuto úlohu řeší jako 4 * 3 = 12. Od 12 odečte zbytek 1 a řešení zapíše jako 11 : 4 = 3 (1). Správnost řešení má ověřit strategií, kterou užíval u předchozích úloh:



Obrázek 28 - Jára U2/c-1

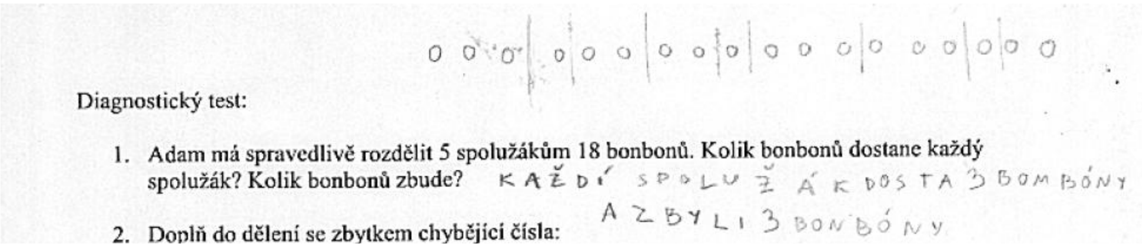
Pomocí metody přiřazování a postupného odčítání zjistil, že jeho řešení nebylo správné, protože 11 : 4 ≠ 3 (1). Zkouší na místo dělence dosadit číslo 12. Užívá při tom poznatku z grafického řešení při použití čísla 11 a uvědomí si, že při hodnotě dělence 12 vyjde úloha beze zbytku. Jeho poznatek je, že dělenec musí být jiné číslo než 11 a 12. Zkouší tedy číslo 13 a graficky ověřuje. Zároveň učinil objev, že pokud známe dělitele, podíl a zbytek, dělence najdeme tak, že vynásobíme dělitele a podíl a zbytek přičteme. Díky tomuto zjištění další úlohu _: 6 = 3 (4) zvládl zpaměti a výsledek si ověřil graficky.



Obrázek 29 - Jára U2/c-2

Toniččino řešení

Úloha 1.



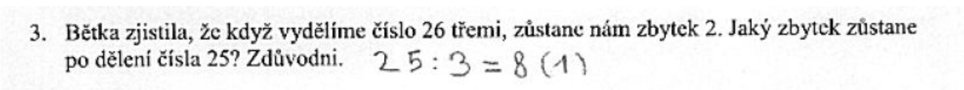
Diagnostický test:

1. Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude? KAŽDÍ SPOLUŽÁK DOSTA 3 BOMBÓNY A ZBYLI 3 BONBÓNY
2. Doplň do dělení se zbytkem chybějící čísla:

Obrázek 30 - Tonička U1

Slovní úlohu řeší žákyně graficky. Nakreslí si 18 bonbonů a zkouší vytvářet skupinky po čtyřech. Zdůvodňuje to, že každý spolužák dostane 4 bonbony. Při kontrole sama zjistí, že to nevychází, protože bonbony musí rozdělit mezi 5 spolužáků. Zkusí skupinky o 1 zmenšit, budou tedy po třech, graficky ověří. Tento postup řešení byl správný, proto odpoví, že každý spolužák dostane 3 bonbony a Adamovi zbydou ještě 3. Postup řešení žákyně byl zajímavý v tom, že nevyužila informaci o počtu spolužáků ze zadání slovní úlohy, ale sama rovnou hledala podíl, tedy počet bonbonů, které dostane každý spolužák.

Úloha 3.

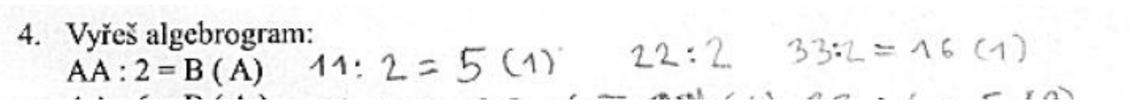


3. Bětka zjistila, že když vydělíme číslo 26 třemi, zůstane nám zbytek 2. Jaký zbytek zůstane po dělení čísla 25? Zdůvodni. 25 : 3 = 8 (1)

Obrázek 31 - Tonička U3

Žákyně si u této slovní úlohy všimla souvislosti mezi velikostí zbytku a dělence, proto odhaduje, že zbytek po dělení čísla 25 třemi bude 1. Následným výpočtem tuto domněnku ověřuje. Říká si řadu násobku 3 a dojde k výpočtu 25 : 3 = 8 (1). V tomto případě bylo vhodné se zabývat touto problematikou více do hloubky a následovala otázka, jaký by byl zbytek, kdyby byl dělenec 24. Žákyně odpověděla, že 0. Další výzvou bylo hledat řešení pro dělence 23, na což žákyně reaguje, že podíl by se o 1 zmenšil a zbytek by byl vysoký. Domnívá se, že 2. Rozšíření úlohy bylo zvoleno proto, že žákyně si dokázala propojit předem dané informace a objevila pravidlo, které v tomto případě funguje při zmenšování dělence.

Úloha 4.

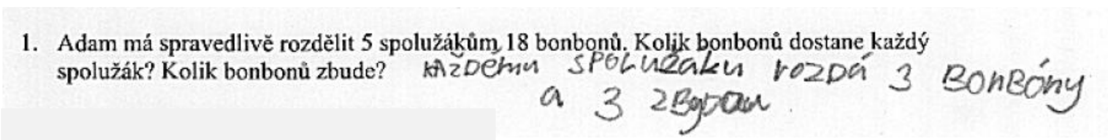

4. Vyřeš algebrogram:
AA : 2 = B (A)   11: 2 = 5 (1)   22:2   33:2 = 16 (1)

Obrázek 32 - Tonička U4

AA : 2 = B (A). Žákyně volí strategii, kdy za A dosazuje 1 a hned jí vyjde řešení 11 : 2 = 5 (1). Po otázce, zda by úloha mohla mít více řešení, přemýšlí a říká, že by mohla, protože jediným konkrétním číslem v zadání je 2. Dále zkouší systematicky hledat další řešení, konkrétně 22 : 2. V jejím zápise je patrné, že úlohu nedořeší, protože vidí, že v tomto případě řešení nenajde, jelikož 22 je číslo sudé, což znamená, že nebude mít zbytek. Pokračuje v hledání a zkouší 33 : 2 = 16 (1). Hodnotí, že řešení neodpovídá zadání, protože čísla na pozicích A nejsou stejná a B by vycházelo 16, a to nejde, protože musí být jednociferné. Na závěr formuluje tvrzení, že úloha nebude mít více řešení, protože každé druhé by bylo sudé a navíc kdyby to bylo liché, bylo by moc velké, myslí tím dvojciferné.

Brunovo řešení

Úloha 1.


1. Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude? KAZDEMU SPOLUZAKU ROZDÁ 3 BONBÓNY A 3 ZBYDOU

Obrázek 33 - Bruno U1-1

Obrázek 34 - Bruno U1-2

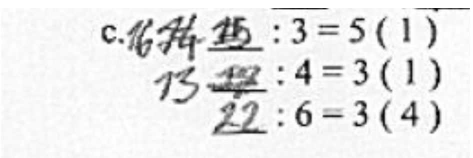
Žák bez jakékoliv výzvy sám rovnou řeší graficky. Přiřazuje bonbony spolužákům. V grafickém znázornění dlouhá čára představuje spolužáka a krátká čára bonbon. Zároveň používá metodu postupného odčítání 18 – 5 = 13, 13 – 5 = 8, 8 – 5 = 3. Z toho plyne odpověď, že každý žák dostane 3 bonbony a 3 bonbony zbydou. Žákova strategie byla rychlá a úspěšná.

Úloha 2.

c. _ : 3 = 5 (1)

_ : 4 = 3 (1)

_ : 6 = 3 (4)



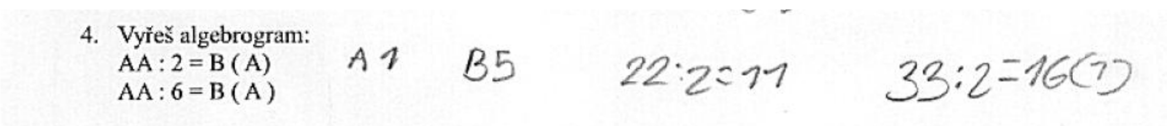
Obrázek 35 - Bruno U2/c

_ : 3 = 5 (1), jeho postup řešení 3 * něco musí být 15. Dále počítá 3 * 5 = 15, píše: 15 : 3 = 5 a potom jeho reakce zní: „Jejda, zbytek musí být 1!“ Zadání se mu zdá těžké. Zkouší dosadit 14 a to mu nevyjde. Dále píše 16 : 3 = 5 (1), protože 16 – 1 je 15 a to potom vychází.

_ : 4 = 3 (1) řeší 3 * 4 = 12, což napíše na prázdné místo a pak si uvědomí, že je potřeba napsat 13.

_ : 6 = 3 (4) řešení najde velmi rychle, díky předchozím úlohám přišel na to, jak v úlohách tohoto typu postupovat.

Úloha 4.



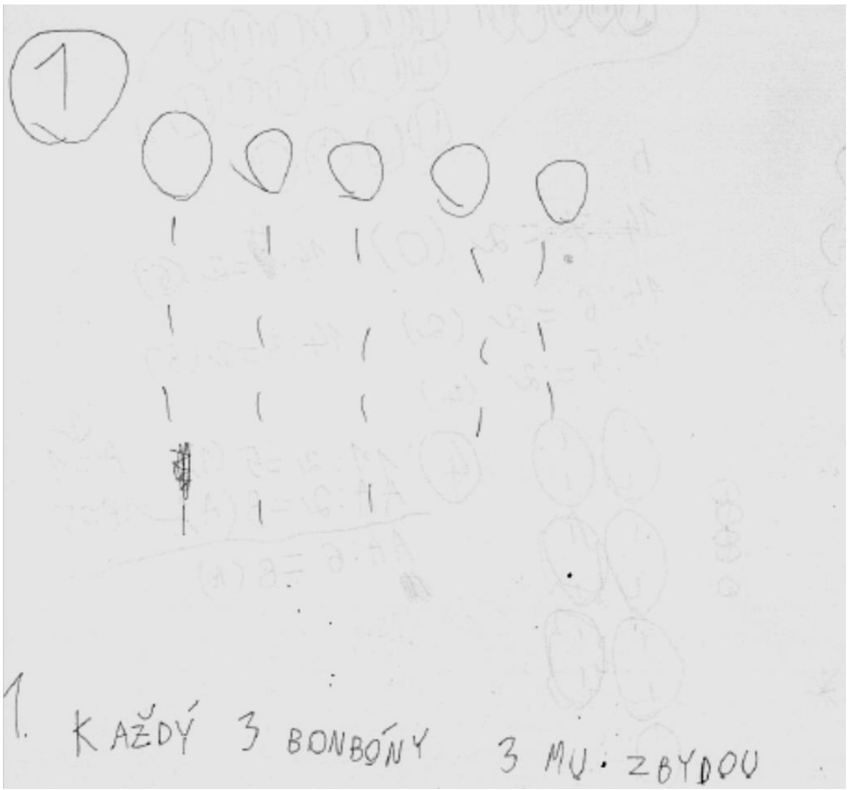
Obrázek 36 - Bruno U4

AA : 2 = B (A). Žák rovnou zkouší 11 : 2 a říká, že výsledek bude 5 a půl. Na poznámku učitele, co kdybychom to nechtěli vyjádřit jako 5,5, ale jako celé číslo a zbytek žák upravuje řešení a říká 11 : 2 = 5 (1) a to vychází. Pro A platí číslice 1 pro B číslice 5. Žák byl vyzván k hledání dalších řešení. Pokračuje systematicky, 22 : 2 = 11 a odpovídá, že B by bylo 11. Na dotaz učitele, zda B může být 11 a na pravidla algebrogramů žák odpovídá, že v algebrogramech platí, že jedno písmenko je jedna číslice a uvědomí si, že daná úloha nevychází. Protože v tomto případě vyšlo dělení beze zbytku. Žák sice popsal správně pravidla řešení algebrogramů. Zatím si však neuvědomil, že v jeho řešení vychází B jako dvojciferné číslo. Žák byl vyzván, aby si toto konkrétní řešení zapsal a uvědomil si, že za číslo B dosadil dvojciferné číslo. Znovu vysvětluje pravidla algebrogramů a v zápise už vidí, že B se nemůže rovnat 11. Zkouší hledat dál, 33 : 2 = 16 (1) a hned ví, že řešení nevyhovuje, protože B je dvojciferné.

Šimonovo řešení

Úloha 1.

Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?



Obrázek 37 - Šimon U1

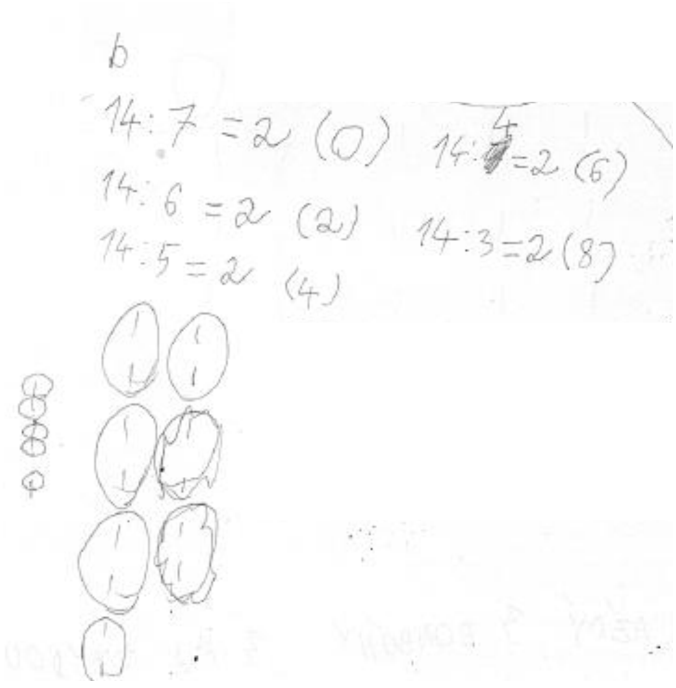
Žák úlohu hned začne řešit graficky. Kolečkem znázorňuje spolužáka, čárka představuje bonbon. Bonbony rozděluje mezi spolužáky. Vyjde mu, že každý dostane 3 bonbony a 3 mu zbudou.

Úloha 2.

a. 9 : 2 = _ (_)

9 se nedá rozdělit, bylo by to 4,5, proto je potřeba najít menší číslo. 8 je méně a při dělení 2 vyjde 4 a zbytek 1.

b. 14 : _ = 2 (_)
17 : _ = 3 (_)
24 : _ = 4 (_)



Obrázek 38 - Šimon U2/b

Znázorňuje graficky pomocí čárek, které dává do skupin po dvou. Vyjde mu 14 : 7 = 2 (0). Na otázku, zda bychom mohli najít řešení, kde by zbytek nebyl 0, žák hned reaguje a píše: 14 : 6 = 2 (2) a výsledek odůvodňuje grafickým řešením, kdy poslední skupinku přehodí do zbytku. V grafickém řešení je to patrné z jiného zakroužkování. Pokračuje dále a zapisuje 14 : 5 = 2 (4) a opět kroužkuje v grafickém řešení. Dále automaticky zapisuje 14 : 4 = 2 (6) a 14 : 3 = 2 (8). Objevil pravidelnost, že když se dělitel zmenšuje o 1, zbytek se přímo úměrně zvyšuje o 2. Žák si zatím neuvědomuje, že zbytek musí být menší než dělitel.

Natálčino řešení

Úloha 1.

Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?

Obrázek 39 - Natálka U1

Žákyně nejprve počítá na prstech a odpoví, že Adamovi zbude 13 bonbonů. Zdůvodní to tím, že 8 – 5 = 3 a k tomu přidá 1 a to je 13. (Jedničkou myslí desítku). Toto řešení bylo správné, protože každý spolužák dostal jeden bonbon a 13 zbylo. A v zadání nebyla podmínka, že Adam chtěl rozdat co nejvíce bonbonů. Na výzvu učitele, aby se pokusila rozdat co nejvíce bonbonů, nakreslila 18 bonbonů a 5 postaviček. Bonbony přiřazuje k postavičkám. Každé přiřadila 2 a řeší, zda zbylé bonbony si Adam nechá, nebo je ještě rozdá. To odůvodnila tím, že rozhodnutí záleží na něm. Nakonec v přiřazování pokračovala a každý spolužák dostal 3 bonbony a 3 zbyly. Z grafického řešení je to patrné.

8.3.2 Analýza jednotlivých úloh – řešitelské strategie

V této podkapitole se budu věnovat analýze jednotlivých úloh z diagnostického testu. Při rozboru jsem na základě řešení žáků vytvořila pro každou úlohu výčet řešitelských strategií, které budu v popisu řadit hierarchicky ve směru od nejčastěji užívaných. Výčet je pouze orientační, protože v některých případech docházelo ke kombinaci různých postupů řešení i na základě diskuze.

8.3.2.1 Úloha 1.

Adam má spravedlivě rozdělit 5 spolužákům 18 bonbonů. Kolik bonbonů dostane každý spolužák? Kolik bonbonů zbude?

Při analýze této slovní úlohy jsem nakonec rozlišila 6 různých žákovských řešitelských strategií. Nejčastěji žáci volili grafickou metodu, kdy přiřazovali bonbony jednotlivým spolužákům. Tato strategie byla úspěšná i díky tomu, že zde byl zadán malý počet žáků a bonbonů a nedocházelo tak k chybám z nepozornosti. Strategie je vhodná pro žáky, kteří potřebují pracovat s konkrétními představami a je pro ně jednodušší si bonbony a spolužáky znázornit. Další metody, které byly použity: řada násobků, metoda přiřazování a metoda postupného odčítání. Někteří žáci pro řešení úlohy zvolili grafické vytváření skupinek či vypsání si řady čísel a následně vytváření skupinek. I když se nabízelo řešit úlohu početně 18 : 5 = 3 (3), nikdo z žáků takto nepostupoval a všichni volili názornější metodu.

Zadání této slovní úlohy je formulováno nejednoznačně, což vedlo k tomu, že v některých případech žák vyřešil úlohu tak, že odpovídala zadání, ale Adam nerozdal maximálně možný počet bonbonů. Mě toto řešení v danou chvíli nenapadlo a otázkami jsem se snažila navést žáky k tomu, aby úlohu vyřešili pro případ, kdy Adam spravedlivě rozdá spolužákům co největší možný počet bonbonů. Tuto chybu jsem si uvědomila až při analýze testů a videí. Domnívám se, že toto zaváhání bylo způsobeno zkušeností z doby, kdy jsem se učila dělit se zbytkem na základní škole a úlohy tohoto typu jsme řešili vždy způsobem, abychom „rozdali" vždy co největší počet. Dalším možným vysvětlením je životní zkušenost např. se spravedlivým rozdáváním bonbonů v závislosti na tom, jestli chceme pouze nabídnout, nebo rozdat co nejvyšší možný počet.

8.3.2.2 Úloha 2.

a.

9 : 2 = _ (_)

Nejčastěji žáci volili strategii řady násobků nebo dále vzhledem k děliteli 2 řešili úlohu zpaměti. Žáci byli v řešení úspěšní. Další strategie volili spíše jednotlivci a jednalo se o metodu postupného odčítání, grafické řešení – napsání si řady čísel a vytváření skupinek, matematický spoj 4 + 4 = 8, hledání nejbližšího možného násobku a grafické přiřazování.

29 : 4 = _ (_)

V řešení jasně převládala strategie řady násobků, někteří žáci řešili zpaměti, s dalšími postupy řešení přicházeli spíše jednotlivci – metoda postupného odčítání, grafické řešení – napsání si řady čísel a vytváření skupinek, spoje 7 + 7 = 14 a 14 + 14 = 28 a majákový spoj s řadou násobků.

49 : 6 = _ (_)

Tuto úlohu řešilo méně žáků a naprostá většina z nich volila strategii řady násobků. Domnívám se, že je to zapříčiněno tím, že žáci neumí zpaměti násobit, proto hledají cestu, jak k řešení dospět, a metoda říkání si násobků je pro ně nejjednodušší, protože část řady násobků znají zpaměti a zbylé si k tomu přičtou. Pouze jeden žák volil grafické řešení – řadu čísel a vytváření si skupinek. Tato strategie nevedla ke správnému řešení, protože jako dělenec bylo zvoleno vyšší číslo a žák poctivě vypsal čísla od 1 do 49 a při řešení se pravděpodobně přehlédl. Další žák volil metodu postupného odčítání.

b.

14 : _ = 2 (_)

Úloha je zadána tak, aby žáci mohli najít více řešení. Většina žáků jich i více hledala. V tomto případě nenajdeme jednu strategii, která by četností užití převyšovala ostatní. Mezi nejčastěji zvolené patřily užití majákového spoje 2 * 7 = 14 a metoda řady násobků. Dalšími strategiemi jsou 2 * _ = 14, metoda pokusu a omylu, vazba dělenec : podíl (14 : 2) a grafické skupinky. Nejčastějším řešením bylo 14 : 7 = 2 (0). V této úloze se ukázalo, že řada žáků má již zautomatizovaný spoj 2 * 7 = 14.

17 : _ = 3 (_)

Tuto úlohu řešilo méně žáků a opět zde nepřevažuje jedna metoda řešení. Žáci volili řadu násobků, metodu pokusu a omylu, grafické řešení – řadu čísel, vytváření skupinek a počítání zpaměti.

24 : _ = 4 (_)

Úloha byla zadána tak, aby žáci měli možnost najít více řešení. O to se pokusily 2/3 z nich, ale řešit tuto úlohu se odhodlal malý počet žáků. Polovina řešitelů volila řadu násobků, zbylí řešili pomocí metody pokusu a omylu, grafického řešení – řady čísel, vytváření skupinek nebo úlohu řešili zpaměti.

c.

_ : 3 = 5 (1)

Tato úloha vede k řešitelské strategii – řešení pomocí zkoušky u dělení se zbytkem (podíl * dělitel + zbytek = dělenec) a tímto způsobem úlohu řešila naprostá většina žáků. Řada z nich tuto metodu teprve objevovala a snažila se porozumět funkci zbytku, proč je ho potřeba přičíst, aby vyšel dělenec vyhovující zadání. Pro některé z nich bylo obtížné přijmout představu, že se zbytek přičítá. Je možné, že jazykově vnímali slovo zbytek spíše k operaci odčítání. V jednom případě byla užita řada násobků.

_ : 4 = 3 (1)

I zde byl uplatněn shodný způsob řešení jako u předchozí úlohy.

_ : 6 = 3 (4)

U třetí ze série gradovaných úloh, které vedly k řešení principem zkoušky, došlo k naprosté shodě v řešitelské strategii u všech žáků. Všichni nakonec dospěli k řešení touto metodou.

8.3.2.3 Úloha 3.

Bětka zjistila, že když vydělíme číslo 26 třemi, zůstane nám zbytek 2. Jaký zbytek zůstane po dělení čísla 25? Zdůvodni.

Při analýze této úlohy jsem se nezabývala řešitelskými strategiemi, jak žáci řešili úlohu 25 : 3 = _ (_), ale zajímalo mě, zda využili informaci, která byla v úloze zmíněna. Na základě věty, že Bětka zjistila zbytek 2 při dělení čísla 26, žáci mohli přijít na to, že pokud budeme dělit stejným dělitelem číslo o jedno menší, tedy 25, zbytek bude také o jedno menší, tedy 1. Šlo o pochopení vztahu 26 : 3 = _ (2) a 25 : 3 = _ (1). Při analýze jsem zjistila, že nadpoloviční většina žáků tento vztah z úlohy nevyčetla, sestavila si úlohu 25 : 3 = _ (_) a vyřešila.

8.3.2.4 Úloha 4.

AA : 2 = B (A)

V úlohách s algebrogramy platí určitá pravidla, a to, že jedno písmeno = jedna číslice a pro úplné vyřešení algebrogramů je potřeba najít všechna řešení. 3/4 žáků se snažilo najít další řešení. Tomuto algebrogramu však vyhovuje pouze jedno řešení. Žáci se tedy pokusili formulovat důvody, proč nelze najít více řešení. Museli si uvědomit, že za písmenko B mohou dosadit pouze jednociferné číslo a dalším argumentem bylo, že všechna sudá čísla dělená 2 budou vycházet beze zbytku. Naprostá většina žáků, která se rozhodla další řešení hledat, tyto důvody zformulovala.

Nejčastější strategií byla metoda pokusu a omylu, kdy žáci zvolili za A většinou číslo 1, což vyšlo, a potom systematicky hledali další řešení. Metodou pokusu a omylu bez systematického hledání řešili úlohu žáci, kteří většinou nehledali více řešení. Spíše jednotlivci užívali řadu násobků 2, nebo grafické znázornění skupinek.

I vzhledem k různým možnostem dosazování byla tato úloha velmi bohatá na diskuzi s dětmi a během řešení žáci přišli na řadu matematických objevů.

AA : 6 = B (A)

Tento algebrogram řešili pouze 3 žáci. Pravděpodobně kvůli tomu, že řešení testu a vysvětlování postupů řešení pro ně už bylo dlouhé, nehledali již více řešení. Jeden z žáků řešil algebrogram pomocí řady násobků šesti, jiný postupně dosazoval a třetí zvolil metodu pokusu a omylu a systematického hledání. Všichni tři dospěli k jednomu řešení.

8.4 Zobecnění

Postupy řešení žáků byly popsány u jednotlivých úloh, ale dalo by se říci, že diagnostický test potvrdil jistou souvislost mezi dělením se zbytkem a kognitivním vývojem dítěte. Řešitelské strategie ukázaly, že někteří žáci ještě potřebovali konkrétní představy, proto volili grafické řešení. Díky tomu lépe rozuměli smyslu výpočtu. Grafické postupy řešení sice trvaly delší dobu, avšak jejich využitím žáci předcházeli numerickým chybám.

U některých žáků byl na základě postupné gradace úloh vidět posun od hledání a ověřování vhodného postupu řešení až po přijetí v danou chvíli nejvhodnějšího a postupné zrychlování počítání. Tyto objevitelské strategie potom vedly i k většímu odhodlání hledat více řešení v úlohách.

Zaznamenala jsem velké rozdíly mezi jednotlivými žáky. Někdo zvládl vyřešit všechny zmiňované úlohy, někdo byl pomalejší. Každý z žáků nakonec vyřešil správně aspoň jednu úlohu. Žáci v průběhu řešení dělali velké množství numerických chyb. Po tom, co jsem se jich zeptala, proč řeší úlohu právě tím způsobem, si často chyby uvědomili, a bylo to v momentu, kdy měli svou strategii vysvětlit nahlas. Jejich vysvětlování bylo velmi rozmanité. Bylo zde potřeba respektovat individualitu žáků a nemít v mysli pouze jednu představu o správném řešení. Tomu jsem se snažila předejít i vzorovým vyřešením testu, ve kterém jsem se snažila předvídat strategie a problematická místa.

Bylo by zajímavé zadat tento test žákům na konci 1. stupně a sledovat, zda se v řešení úloh s problematikou dělení se zbytkem posunuli kvalitativně výš. Měl by tomu odpovídat i kognitivní vývoj dítěte v rámci ontogeneze.

9 Hry s využitím dělení se zbytkem

V učebnicích matematiky a na českých internetových stránkách, které se věnují dělení se zbytkem, se většinou můžeme setkat pouze s numerickými úlohami či slovními úlohami, kde se vyskytuje dělení se zbytkem. Učitelé často vyhledávají na internetu různé inspirace, jak výuku udělat zajímavější. Jednou z nejčastějších variant pro zpestření výuky jsou různé typy her. Pro základní matematické operace (sčítání, odčítání, násobení a dělení) jich najdeme spoustu. Avšak pro dělení se zbytkem se s nimi v učebnicích nebo na internetových portálech setkáme zřídka.

Rozhodla jsem se vyhledávat mimo webové stránky České republiky. Po zadání „division with remainders game“ do internetového vyhledávače se objeví spousta odkazů na online hry, kde se vyskytuje dělení se zbytkem. Většina z nich spočívá v tom, že dítě co nejrychleji vyřeší numerickou úlohu a za odměnu se mu přičtou body. Mezi těmito hrami jsem však našla dvě, které byly odlišné a přišly mi zajímavé pro obohacení hodin matematiky či pro domácí procvičování. Obě hry jsem modifikovala tak, aby se daly hrát i „offline“.

Pro žáky prvního stupně jsou hry důležitým prvkem v jejich rozvoji. Nesmíme opomenout zmínit různé benefity, které hry s didaktickým zaměřením přináší. V tomto konkrétním případě jde o procvičování dělení se zbytkem, přemýšlení nad vztahy mezi čísly a učení se různým kombinacím tak, aby byla co nejlépe splněna podmínka. Dále je zde prvek socializační, kdy se žák učí přijímat role ať už vítěze či poraženého. Učí se respektovat své soupeře a dodržovat stanovená pravidla. Nutno ještě zmínit, že hra nemusí vždy vyhovovat všem a to co baví jednoho, nemusí být ideální pro druhého. Hra by neměla nikomu navozovat pocit frustrace. Huizinga to shrnuje slovy: „*Hra je dobrovolná činnost, která je vykonávána uvnitř pevně stanovených a prostorových hranic, podle dobrovolně přijatých, ale bezpodmínečně závazných pravidel, která má svůj cíl v sobě samé a je doprovázena pocitem napětí a radosti a vědomím „jiného bytí“ než je „všední život“.“* (Huizinga in *https://cs.wikiquote.org/wiki/Hra*)

9.1 Hra typu „Myslím si číslo“

http://nrich.maths.org/6402

Tato hra je zaměřena na dělení se zbytkem a nutno dodat, že při hledání strategie k co nejefektivnějšímu řešení, žák vypočítá celou řadu úloh. Na internetu je hra určena pro

1 hráče, který hraje proti počítači. Počítač si myslí číslo mezi 1 a 100 a hráč má přijít na to, jaké číslo to je. Hráč si vybírá dělitele od 2 do 9 a počítač vždy napíše, jaký je zbytek při dělení zvoleným dělitelem. Cílem hry je uhodnout myšlené číslo za pomoci co nejméně otázek (méně otázek = více bodů).

Pokud hráč správně uhodne myšlené číslo, bodové ohodnocení je následující:

2 dělení => zisk 10 bodů
3 dělení => zisk 9 bodů
4 dělení => zisk 8 bodů
5 dělení => zisk 7 bodů
6 dělení => zisk 6 bodů
7 dělení => zisk 5 bodů
8 dělení => zisk 4 bodů
9 dělení => zisk 3 bodů

Při nesprávném tipu hráč ztrácí 5 bodů.

V online verzi platí ještě pravidlo, že každým dalším dotazem musíme získat novou informaci. Pokud se zeptáme na nepotřebné dělení, např. nejprve se zeptáme na zbytek při dělení 10 a počítač odpoví 5 a některá z dalších otázek by byla dotaz na zbytek při dělení číslem 5, počítač to bude brát jako nadbytečnou otázku, protože je jasné, že pokud x : 10 = _ (5), bude platit x : 5 = _ (0). Při užití aspoň jedné nadbytečné otázky v rámci dotazování se na myšlené číslo, bude i při správné odpovědi bodový zisk za dané kolo 0.

Cílem hry je získat co nejdříve 100 bodů.

Hru je možné modifikovat i pro 2 hráče. Jeden z nich převezme roli počítače a bude si myslet číslo. Druhý hráč bude hádat, které číslo si myslí.

9.2 Sestav z daných čísel úlohu tak, aby byl zbytek co nejvyšší

http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_remainders_count.html

Jedná se o online počítačovou hru, kdy je úkolem hráče sestavit ze tří čísel úlohu, kde vyjde co největší zbytek. Čísla získá náhodným losem (virtuálním hodem třemi hracími kostkami) a tato čísla poskládá do dvojciferného dělence a jednociferného dělitele. Sestavenou úlohu vyřeší – tedy dopíše podíl a zbytek. Zbytek je jeho skóre za jedno hrací kolo. Hráč hraje proti počítači a ten, kdo získá jako první 20 bodů, vyhrává.

Hra v této online formě je vhodná pro učebnu, kde by měl každý žák svůj počítač (např. učebna výpočetní techniky), hrát by se dalo i u interaktivní tabule, kde by se žáci snažili přijít na co nejvýhodnější kombinaci čísel. Dalším uplatněním by mohla být i domácí forma procvičování pro děti netradiční formou.

Ne všude lze zajistit tyto podmínky pro online hru, proto vidím jako možnost modifikovat tuto hru i pro použití bez počítače. Stačily by k tomu 3 hrací kostky a papír, kam by se zaznamenávaly body. Místo počítače by hru hrál ještě jeden hráč. K řešení sestavené úlohy by se dala připravit zalaminovaná čísla, aby je hráči nemuseli zapisovat.

Výše zmíněná varianta hry má však omezení, které je způsobeno hrací kostkou, kde nalezneme čísla pouze 1–6. Řešením pro rozšíření oboru přirozených čísel v intervalu 1–9 by bylo připravení tří sad čísel od 1 do 9. Každá sada by byla umístěna v neprůhledném sáčku a v každém kole by si hráč vylosoval z každého sáčku právě jedno číslo. Čísla by manuálně poskládal do úlohy, kterou by vyřešil, a princip by byl stejný jako u předchozích variant hry.

10 Závěr

V této práci jsem se zabývala dělením se zbytkem v souvislosti s kognitivními schopnostmi českých žáků. V úvodu diplomové práce jsem si stanovila tři cíle. Postupovala jsem od obecnějších ke konkrétnějším. Nejprve jsem provedla analýzu dostupných materiálů, konkrétně učebnic. Dále jsem sledovala problematiku dělení se zbytkem z pohledu žáků, jak žáci rozumí úlohám, kde je nutno získat neúplný podíl jako výsledek. Třetí hledisko bylo nejkonkrétnější, kdy jsem se já jako učitel snažila hlouběji porozumět operaci dělení se zbytkem a jeho zařazování do výuky.

Při analýze zkoumaných učebnic jsem zjistila, že učebnice Nakladatelství Alter a Prodos mají řadu společných znaků. V obou případech je zde nejprve užit odborný matematický jazyk, kdy je představen algoritmus dělení se zbytkem na konkrétním výpočtu, dále následují úlohy, které vedou k procvičení tohoto algoritmu, dalším krokem jsou slovní úlohy, ve kterých žák uplatňuje zkušenost a to vše slouží nakonec k užití, jako nedílné součásti písemného dělení. V něm se předpokládá zautomatizování dělení se zbytkem tak, aby se žák mohl věnovat nově zaváděnému algoritmu. Vzhledem k důležitosti procvičování v tomto přístupu je v učebnicích zařazeno velké množství numerických úloh. Naproti tomu Nakladatelství Fraus v didaktické řadě postupuje naprosto opačně. V těchto učebnicích se u dělení se zbytkem nezavádí žádný algoritmus, ale žáci přicházejí na řešitelské strategie sami. Dochází k tomu již v propedeutických úlohách, kdy jsou zadání formulována tak, aby žáci užili svůj vlastní postup řešení. V zavádění dělení se zbytkem je problematika popsána na modelové situaci. Při řešení úloh jsou žáci vyzváni k manipulaci s žetony, nebo jinými předměty, aby získali konkrétní zkušenost. Následují úlohy, které vedou k „mnohému počítání k vyššímu cíli". V nich žáci odhalují zákonitosti a formulují pravidla pomocí mateřského jazyka. Dělení se zbytkem se potom stává součástí algoritmu písemného dělení jednociferným číslem, kde už je užit odborný jazyk. Učebnice Nakladatelství Fraus se dále odlišují i v zařazení nestandardních úloh.

Důležitou součástí diplomové práce byl diagnostický test a individuální rozhovory s dětmi. Během těchto rozhovorů a studování postupů řešení jsem zjistila, že žáci vždy nemusí rozumět zadání stejně. Dokazuje to i analýza jednotlivých úloh v testu, kdy žáci volí různé strategie. V některých případech převládala jedna strategie, ale vyskytly se i úlohy, kde bylo užití různých strategií vyrovnané. Díky individuálním rozhovorům a možnosti ptát se, proč dítě zvolilo konkrétní strategii, bylo možné proniknout do jeho uvažování nad danou problematikou. Je nutné podotknout, že žákům trvalo řešení úloh poměrně dlouho, ale na druhou stranu při něm v několika případech učinili nějaký objev. Domnívám se, že tyto momenty, kdy dítě samo uvidí a pochopí nějakou souvislost, jsou jedny z nejdůležitějších a měly by se podle mého názoru ve vyučování podporovat.

Další zmíněný cíl práce jsem formulovala jako nejkonkrétnější, protože se týkal přímo mé osoby, ve smyslu já učitel. Překvapilo mě, kolik různých úloh týkajících se dělení se zbytkem lze formulovat a ještě více mě překvapilo, s kolika postupy řešení přišly děti. Zamýšlela jsem se nad výhodami a nevýhodami prvků konstruktivismu a transmise. Důležité pro mě bylo uvědomit si, že i dělení se zbytkem, které jsem dříve znala pouze jako algoritmus, lze učit i jinak. Největší přínos pro mě samotnou vidím ve zjištění, že i úlohy z učebnic, které jsou pojaty tradičním způsobem, lze obohatit prvky konstruktivismu. Já jako učitelka bych měla přijímat tyto úlohy jako výzvy k tomu, abych se nad nimi do hloubky zamýšlela a snažila se z nich získat co nejvíce.

Učitel může při výuce využívat různé didaktické pomůcky. Nejdůležitější je však jeho vnitřní přesvědčení. Tato práce mě utvrdila v tom, že je pro mě cennější spolu s žáky objevovat, konstruovat poznání, než se stavět do role toho, kdo všechno ví a své poznatky i třeba v dobré víře předává dál.

11 Seznam použitých informačních zdrojů

FONTANA, David. *Psychologie ve školní praxi: příručka pro učitele*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2003, 383 s. ISBN 80-7178-626-8.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. 1. vyd. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2014, 229 s. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-397-0.

HELUS, Zdeněk. *Dítě v osobnostním pojetí: obrat k dítěti jako výzva a úkol pro učitele i rodiče*. 2., přeprac. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2009, 286 s. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-628-5.

KASÍKOVÁ, Hana. *Kooperativní učení, kooperativní škola*. Vyd. 2., rozš. a aktualiz. Praha: Portál, 2010, 151 s. ISBN 978-80-7367-712-1.

KASÍKOVÁ, Hana. *Učíme (se) spolupráci spoluprací*. 2., rozš. vyd. Kladno: AISIS, 2009, 143 s. Dokážu to? ISBN 978-80-904071-6-9.

KASPER, Tomáš a Dana KASPEROVÁ. *Dějiny pedagogiky*. Vyd. 1. Praha: Grada, 2008, 224 s. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-2429-4.

KOLÁŘ, Zdeněk. *Výkladový slovník z pedagogiky*. Vyd. 1. Praha: Grada, 2012, 192 s. ISBN 978-80-2473-710-2.

KOSÍKOVÁ, Věra. *Psychologie ve vzdělávání a její psychodidaktické aspekty*. Vyd. 1. Praha: Grada, 2011, 265 s. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-2433-1.

Pedagogická encyklopedie. Vyd. 1. Praha: Portál, 2009, 935 s. ISBN 978-80-7367-546-2.

PRŮCHA, Jan. *Přehled pedagogiky: úvod do studia oboru*. 3., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 271 s. ISBN 978-80-7367-567-7.

PRŮCHA, Jan, Eliška WALTEROVÁ a Jiří MAREŠ. *Pedagogický slovník*. 6.,aktualiz. a rozš. vyd. Praha: Portál, 2009, 395 s. ISBN 978-80-7367-647-6.

ŘÍČAN, Pavel. *Psychologie: příručka pro studenty*. Vyd. 2., dopl. Praha: Portál, 2008, 294 s. ISBN 978-80-7367-406-9.

SPILKOVÁ, Vladimíra. *Proměny primárního vzdělávání v ČR*. Vyd. 1. Praha: Portál, 2005, 311 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-7178-942-9.

VÁGNEROVÁ, Marie. *Vývojová psychologie: dětství a dospívání*. Vyd. 2., dopl. a přeprac. Praha: Karolinum, 2012, 531 s. ISBN 978-80-246-2153-1.

VALIŠOVÁ, Alena a Hana KASÍKOVÁ. *Pedagogika pro učitele*. Vyd. 1. Praha: Grada, 2007, 402 s. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1734-0.

Učebnice Nakladatelství Alter

BLAŽKOVÁ, Růžena. Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace. Vyd. 2. Všeň: Alter, 2009, 159 s. ISBN 978-80-7245-206-4.

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Matematika pro 4. ročník základních škol*. Vyd. 1. Všeň: Alter, 2010, 2 sv. ISBN 978-80-7245-145-6.

EICHLEROVÁ, Marie, Hana STAUDKOVÁ a Ondřej VLČEK. *Matematika*. Vyd. 9. Všeň: Alter, 2011, 32 s. ISBN 978-80-7245-224-8.

JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol*. Vyd. 1. Všeň: Alter, 2009, 2 sv. ISBN 978-80-7245-154-8.

Učebnice nakladatelství Prodos

MIKULENKOVÁ, Hana a Josef MOLNÁR. *Matematika a její aplikace: pro I. ročník*. Olomouc: Prodos, 2006, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 80-7230-158-6.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 2. ročník*. Olomouc: Prodos, 2007, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-181-2. (3 pracovní sešity)

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 3. ročník*. Olomouc: Prodos, 2007, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-184-3. (3 pracovní sešity)

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace pro 4. ročník*. 2. vyd., aktualiz. dle RVP ZV. Olomouc: Prodos, [tisk 2008], 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-203-1. (3 pracovní sešity)

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace: 5. ročník*. Olomouc: Prodos, 2008, 3 sv. Modrá řada (Prodos). ISBN 978-80-7230-208-6. (3 pracovní sešity)

Učebnice Nakladatelství Fraus

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. 978-80-7238-771-7. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 9788072387687, K044. (pracovní učebnice 1. díl)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-768-7. (pracovní učebnice 2. díl)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ. *Matematika pro 2. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2008. ISBN 978-80-7238-982-7. (pracovní učebnice 3. díl)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-807-2388-240. (učebnice)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-827-1. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: učebnice pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-80-7238-825-7. (pracovní sešit 1)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jana SLEZÁKOVÁ-KRATOCHVÍLOVÁ a Jitka MICHNOVÁ. *Matematika: pro 3. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009. ISBN 978-807-2388-264. (pracovní sešit 2)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: učebnice pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-940-7. (učebnice)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-943-8. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-941-4. (pracovní sešit 1)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ a Eva BOMEROVÁ. *Matematika: pro 4. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2010. ISBN 978-80-7238-942-1. (pracovní sešit 2)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011, ISBN 978-80-7238-966-7. (učebnice)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-969-8. (metodická příručka pro učitele)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-967-4. (pracovní sešit 1)

HEJNÝ, Milan, Darina JIROTKOVÁ, Jitka MICHNOVÁ a Eva BOMEROVÁ. Ma*tematika: pro 5. ročník základní školy*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2011. ISBN 978-80-7238-968-1. (pracovní sešit 2)

Internetové zdroje

http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf (citováno dne 25. 6. 2015)

http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani (citováno dne 25. 6. 2015)

https://cs.wikiquote.org/wiki/Hra (citováno dne 25. 6. 2015)

http://nrich.maths.org/6402 (citováno dne 25. 6. 2015) http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_remainders_count.html (citováno dne 25. 6. 2015)

http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/schvalovaci-dolozky-ucebnic-2013 (citováno dne 25. 6. 2015)

http://www.h-mat.cz/hejneho-metoda (citováno dne 25. 6. 2015)

12 Seznam příloh

Příloha 1 - Matematika a její aplikace (RVP ZV)

Výtah z RVP ZV

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru

1. stupeň

ČÍSLO A POČETNÍ OPERACE

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- **M-3-1-01** ***používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků***
- **M-3-1-02** ***čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti***
- **M-3-1-03** ***užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose***
- **M-3-1-04** ***provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly***
- **M-3-1-05** ***řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace***

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- **M-5-1-01** ***využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení***
- **M-5-1-02** ***provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel***
- **M-5-1-03** ***zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel***
- **M-5-1-04** ***řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel***
- **M-5-1-05** ***modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku***
- **M-5-1-06** ***porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel***
- **M-5-1-07** ***přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty***
- **M-5-1-08** ***porozumí významu znaku „-„ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose***

Učivo

- přirozená čísla, celá čísla, desetinná čísla, zlomky
- zápis čísla v desítkové soustavě a jeho znázornění (číselná osa, teploměr, model)
- násobilka
- vlastnosti početních operací s čísly
- písemné algoritmy početních operací

ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- **M-3-2-01** ***orientuje se v čase, provádí jednoduché převody jednotek času***
- **M-3-2-02** ***popisuje jednoduché závislosti z praktického života***
- **M-3-2-03** ***doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel***

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- **M-5-2-01** ***vyhledává, sbírá a třídí data***
- **M-5-2-02** ***čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy***

Učivo

- závislosti a jejich vlastnosti
- diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- **M-3-3-01** ***rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci***
- **M-3-3-02** ***porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky***
- **M-3-3-03** ***rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině***

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- **M-5-3-01** ***narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce***
- **M-5-3-02** ***sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran***
- **M-5-3-03** ***sestrojí rovnoběžky a kolmice***
- **M-5-3-04** ***určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu***
- **M-5-3-05** ***rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru***

Učivo

- **základní útvary v rovině** – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- **základní útvary v prostoru** – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
- délka úsečky; jednotky délky a jejich převody
- obvod a obsah obrazce
- vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- osově souměrné útvary

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- **M-5-4-01** ***řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky***

Učivo

- slovní úlohy
- číselné a obrázkové řady
- magické čtverce
- prostorová představivost

(http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani)

Příloha 2 - Propedeutická úloha, Prodos/U/I/2. díl/s. 3

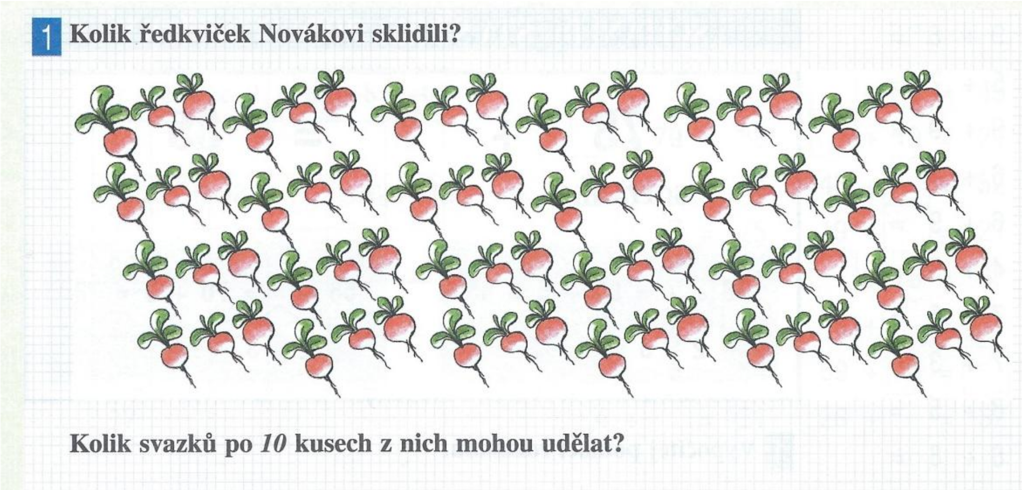
Obrázek 40 - Prodos/U/I/2. díl/s. 3

Grafické znázornění úlohy vede k výpočtu danému konkrétním numerickým zápisem 9 : 2 = 4 (1). Jedná se o propedeutiku dělení se zbytkem. Na obrázku je jasně vidět rukavice, která není do páru – tedy zbývá. Žáci mají za úkol podtrhnout stejnou barvou rukavice, které k sobě patří. Dále mají odpovědět na otázku, kolik rukavic je na obrázku. Posledním úkolem podle autorů je určit, co musíme udělat, aby všechny rukavice tvořily páry. Zřejmě autoři učebnice očekávají, že děti podtrhnou čtyřmi různými pastelkami rukavice, které tvoří páry a dokreslí chybějící modrou rukavici.

Úloha má zjevně propedeutický význam, kdy děti řeší tradiční úlohu netradičně zadanou obrázkem se sémantickým kontextem. Žáci jsou jistě zvyklí hledat dvojice podle daných kritérií a zde je zcela přirozeně navozen problém, který dokážou vyřešit znalostí situace. Místo podtrhávání stejnou pastelkou je možné spojit odpovídající rukavice šňůrkou. Také může učitel sledovat, jakou strategii děti zvolí při odpovědi na počet rukavic. Nabízí se zde možnost nejprve spojit rukavice do páru a provést vlastně zkoušku dělení se zbytkem 4 * 2 + 1 = 9, nebo jednoduše počítat po jedné s ukazováním na jednotlivé rukavice. Před řešením poslední výzvy by možná stálo za to se zeptat, kolika dětem rukavice patří a potom diskutovat nad tou jednou, která zbyla. Otázka, co musíme udělat, aby všechny rukavice tvořily páry, vede ke dvěma možným způsobům řešení – přebývající rukavici můžeme vyhodit (a tedy např. škrtnout nebo začernit), případně ji může babička znovu uplést/ušít. Pak by ji děti dokreslily. V tom případě je zde i přesah do osové souměrnosti, protože rukavice máme pro pravou a levou ruku. Učitel by se mohl zeptat, pro jakou ruku by se mohla hodit modrá rukavice na obrázku, žáci by nakreslili rukavici pro druhou ruku.

Podle mého názoru je tato úloha velmi bohatá a vhodná pro propedeutiku do různých matematických oblastí. Zároveň je její forma zadání srozumitelná a věkově přiměřená žákům prvního ročníku (pokud zadání dětem přečte vyučující). Splňuje také pravidlo, aby byly děti seznamovány vhodným způsobem s problematikou dělení se zbytkem dříve, než k tomu dojde ve výuce dle ŠVP.

Příloha 3 - Propedeutická úloha, Prodos/U/II/3. díl/s. 3



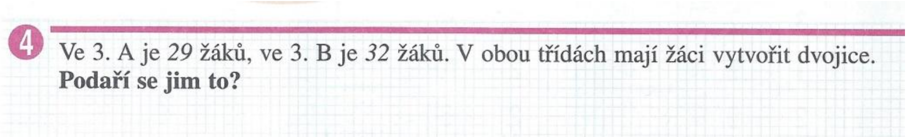
Obrázek 41 - Prodos/U/II/3. díl/s. 3

Žáci mají v této úloze zjistit několik věcí. Nejprve kolik ředkviček Novákovi sklidili. Grafické znázornění vede k několika strategiím, které mohou žáci použít. Mohou postupovat počítáním po jedné, nebo využijí grafického naznačení skupinek po 3 a budou počítat 3, 6, 9, 12, …, 72 a případně si jednotlivé řádky sečíst. Dále mohou využít naznačení 6 sloupců po 12 ředkvičkách, atd. Žáci dojdou k výsledku, že Novákovi sklidili 72 ředkviček. Následuje otázka, kolik svazků po 10 kusech z nich mohou udělat? Úloha vede k numerickému zápisu 72 : 10 = 7 (2), jedná se tedy o propedeutiku dělení se zbytkem, protože žáci 2. ročníku ještě nemají dělení zbytkem zavedeno. Je zde prostor k tomu, aby volili různé cesty, které povedou k výsledku. Mají možnost úlohu řešit graficky, protože všechny ředkvičky jsou v učebnici znázorněny.

Tato slovní úloha má význam pro hledání různých strategií ke zjištění celkového počtu ředkviček. Žáci mohou procvičovat řady násobků. Zajímavé by bylo porovnávání rychlostí jednotlivých strategií – jejich výhody a nevýhody, které by žáci sami formulovali. Pro propedeutiku dělení se zbytkem je zajímavá druhá otázka, kde žáci dávají ředkvičky do svazků. Učitel by měl nechat děti řešit tuto úlohu individuálně a potom je vyzvat, aby předvedly ostatním svá řešení. Ve třídě by mohla proběhnout diskuze, v čem je jejich řešení výhodné, proč ho zvolily a zda pomocí jejich strategie dospěly ke správnému výsledku. Učitel by mohl po dětech chtít, aby tento výsledek zapsaly. Zde jim rozhodně nebude předkládat numerický zápis 72 : 10 = 7 (2), tím by předbíhal, ale mohl by vidět, jak by úlohu žáci zapsali pomocí čísel, aniž by se setkali se zápisem, který se po nich bude později vyžadovat.

Takto zadaná slovní úloha má v učebnici matematiky pro 2. ročník smysl a je dobře, že je v učebnici zařazena, aniž by bylo dělení se zbytkem vyloženo. Vzniká tím prostor pro žáky, aby přišli se svými strategiemi řešení, protože by nemusely být uniformní. Tento přístup učitele by byl konstruktivistický – žáci by sami objevovali, i když je dělení se zbytkem zařazeno v RVP ZV až do výstupů pro 3.-5. ročník. Učebnice sice u sebe nemá přiloženou metodiku pro učitele, ale vidím zde možnost pracovat s úlohou tak, aby žáci měli možnost různých postupů řešení.

Příloha 4 - Propedeutická úloha Prodos/U/II/3. díl/s. 3


4 Ve 3. A je *29* žáků, ve 3. B je *32* žáků. V obou třídách mají žáci vytvořit dvojice.
Podaří se jim to?

Obrázek 42 - Prodos/U/II/3. díl/s. 3

Žáci mají za úkol rozdělit žáky ze třídy do dvojic. V jedné třídě je 29 a v druhé 32 žáků. Vhodně jsou zde zvoleny právě dvojice, protože vytváření dvojic a počítání dvojic mají žáci více procvičené a zažité. Často sami počítají po dvojicích „dva, čtyři, šest, osm, …“ a toto počítání znají i z praxe, kdy je učitel přepočítává, když třeba někam jdou. Opět je zde prostor pro vlastní řešení. Tentokrát by řešitelské strategie mohly být ještě pestřejší, protože zde není grafická podpora a bylo by přímo na žácích, jakým postupem by na řešení přišli. Svá řešení by žáci měli třídě představit. Pro 3. A vychází úloha se zbytkem, konkrétně 29 : 2 = 14 (1), pro 3. B vychází beze zbytku 32 : 2 = 16. Úloha je navíc zadána tak, že dělenec přesahuje obor malé násobilky pro násobky čísla 2, proto žáci nevolí pamětné násobení nebo dělení, ale musí hledat jinou cestu, jak se dobrat k výsledku.

Úloha by mohla být pro zájemce ještě rozšířena o otázky typu: Pomohlo by, kdyby se obě třídy spojily, vytvořili by tak žáci dvojice? Co kdyby žáci měli vytvořit trojice, vyšlo by to? U třídy 3. A je jako počet žáků zvoleno prvočíslo, proto by zde nastala situace, že úloha nebude mít beze zbytku řešení a bylo by zajímavé, zda by někdo přišel na to, jak to dokázat. Ale toto zadání by nebylo vhodné pro všechny, spíš jak jsem již uváděla, jen pro zájemce a nadšence. V hodině tělesné výchovy by se dalo na tuto úlohu v upraveném zadání navázat, kdy by žáci měli vytvářet dvojice a mohli by nejprve bez manipulace odhadnout, zda se jim podaří dvojice beze zbytku vytvořit. Případně by mohli zkoušet hledat dělitele, který bude dělit dělence beze zbytku.

I když se úloha zdá být na první pohled velmi jednoduchá, následnými otázkami lze propedeuticky pracovat s dělením se zbytkem (přestože je úloha zařazena do 3. ročníku, má propedeutický charakter, neboť ji najdeme hned v 1. dílu učebnice a kapitolu Dělení se zbytkem nalezneme až ve 3. dílu), s dělitelností a úlohu tím gradovat. Zadání vybízí k tomu, aby žáci přímo vyzkoušeli, zda by ve své třídě vytvořili dvojice beze zbytku a následně ověřili, zda byl jejich předpoklad správný. Je ovšem potřeba, aby učitel vnímal „skrytý“ potenciál úlohy a s případným rozšířením úlohy pracoval.

Příloha 5 - Propedeutická úloha, Prodos/U/III/1. díl/s. 60

1 V železničním vagonu je *8* kupé. V každém kupé je *6* míst k sezení. **Kolik cestujících je ve vagonu, jestliže na *3* cestující nezbylo místo k sezení a stojí v chodbičce vagonu?**

Obrázek 43 - Prodos/U/III/1. díl/s. 60

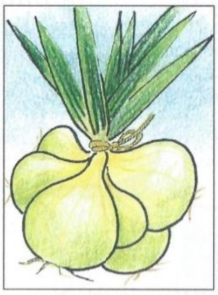
Tato slovní úloha nevede přímo k operaci dělení se zbytkem, ale řeší se principem zkoušky, kterou při dělení se zbytkem děláme. Není tedy na škodu, že se žáci s tímto typem úlohy setkají ještě před samotnou kapitolou Dělení se zbytkem. Konkrétní číselný zápis pro tuto úlohu je 8 * 6 + 3 = 51. Úloha je zaměřena primárně na procvičení násobení, ale žáci nesmí zapomenout přičíst k výsledku zbytek, aby jim vyšel počet všech cestujících.

Stejně jako u předchozích úloh lze hledat různé dělitele (počet míst v kupé). A opět to bude z pohledu žáka obtížnější, protože díky dělenci 51 se v případě některých dělitelů (1, 2, 3, 4, 5 a potom 11+) dostáváme mimo obor malé násobilky. Zadání by se dalo využít pro skupinovou práci, kdy by každá skupina prověřovala různé dělitele a potom by svá řešení prezentovala ostatním. Kdybychom nechali dělitele v oboru celých čísel v intervalu <1;15>, našli bychom 2 řešení, která vychází beze zbytku 51 : 1 = 51 a 51 : 3 = 17. Zde by byl na místě dotaz, jestli jsme našli opravdu všechny varianty, kdy by byla při počtu 51 cestujících všechna kupé plně obsazena, a nikdo by nestál v uličce. Tato otázka přesahuje do situace záměny podílu a dělitele, kdy by děti mohly přijít na to, že když je číslo 51 dělitelné 3 beze zbytku, bude zároveň dělitelné 17 beze zbytku. To samé bude v případě, kdy bude dělitelem 1 nebo dělenec samý. Ale vzhledem ke kontextu slovní úlohy je málo pravděpodobné, že bychom našli vlaky, kde by byla kupé po 1, 17 nebo 51 místech k sezení. Kupé pro 3 by například mohl mít lůžkový vůz, kde by byla 3 lůžka a 4. místo by bylo pro zavazadla. Pro rozšiřující otázky je dobré, že úloha není graficky znázorněna, protože žáci mají možnost přijít s vlastním myšlenkovým konstruktivistickým procesem, kdy nebudou svázáni navrhovaným způsobem řešení. Mohou si např. zvolit svůj způsob řešení, ať už využití objektů např. víček od PET lahví a přiřazování cestujících do jednotlivých kupé nebo své grafické řešení, metodu postupného odčítání, využití pamětné znalosti násobilkových řad, hledání v tabulce násobků a další.

I tato úloha nabízí žákům různé postupy řešení, protože je svým zadáním mezi ostatními úlohami v této učebnici ojedinělá a zároveň žákům nebyl prozrazen postup řešení na předchozích stránkách. Primárním záměrem je procvičení operace násobení a následné přičtení zbylých cestujících. Právě tímto postupem žáci budou pravděpodobně později postupovat při provádění zkoušky v úlohách, kde bude figurovat neúplný podíl a zbytek. Kladně hodnotím, že autoři zařadili tento typ slovní úlohy do 3. ročníku, kdy už mají žáci více zkušeností s řešením slovních úloh a mohou případně snáze reagovat na učitelovy výzvy a prohlubovat vhled např. do záměny dělitele a podílu, či důkazů o konečném počtu řešení.

Příloha 6 - Propedeutická úloha, Prodos/U/III/1. díl/s. 61

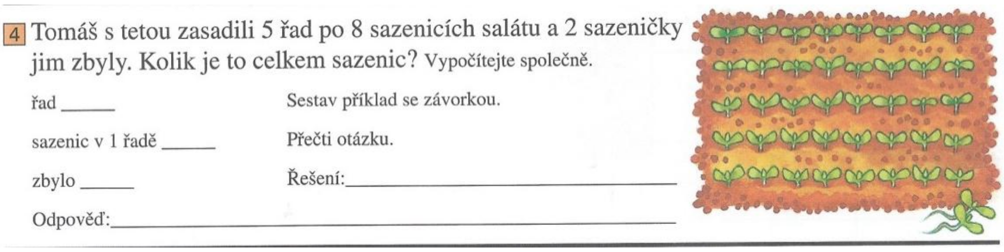
3 Dědeček vázal cibuli do svazků po *10*. Získal *6* svazků, ale *7* cibulí mu zbylo. **Kolik kusů cibule sklidil?**



Obrázek 44 - Prodos/U/III/1. díl/s. 61

Stejně jako na předchozí straně učebnice je tato úloha zaměřena na propedeutiku zkoušky u dělení se zbytkem. Žáci by tedy mohli při řešení postupovat podobným způsobem. Numerický zápis by v tomto případě byl 6 * 10 + 7 = 67.

Příloha 7 - Propedeutická úloha, Alter/PU/II/7. díl/s. 30


4 Tomáš s tetou zasadili 5 řad po 8 sazenicích salátu a 2 sazeničky jim zbyly. Kolik je to celkem sazenic? Vypočítejte společně.

řad ______ Sestav příklad se závorkou.

sazenic v 1 řadě ______ Přečti otázku.

zbylo ______ Řešení: ______

Odpověď: ______

Obrázek 45 - Alter/PU/II/7. díl/s. 30

Výpočet není primárně na dělení se zbytkem, ale určitou souvislost s ním má. Abychom zjistili počet sazenic, musíme užít stejný výpočet, jako používáme při zkoušce u dělení se zbytkem, konkrétně (5 * 8) + 2 = 42. Úloha je zároveň graficky znázorněna, žáci tedy mají výhodu, že zde konkrétně vidí, jak byly sazenice zasazeny.

Úloha je zařazena do druhého ročníku a dala by se klasifikovat mezi úlohy, které jsou propedeuticky zaměřené na problematiku dělení se zbytkem. Pro žáky druhé třídy je při řešení nové situace potřeba co nejvíce konkretizace. V tomto případě nám tak slouží grafické znázornění, kdy žáci přímo vidí počet řad a počet sazenic v jednotlivých řadách. Zároveň tam vidí i zbylé sazenice. Takto znázorněná úloha podpoří porozumění zadání. Už při samotném čtení se zde žáci setkají se slovem „zbyly“ a díky obrázku si mohou uvědomit, které konkrétní sazenice to byly. Princip řešení se závorkou, jak po nás vyžadují autoři, je totožný jako zkouška při dělení se zbytkem. Žák vlastně sám objevuje princip zkoušky u látky, která pro něj ještě není zavedena. Pro opravdové matematické nadšence by stálo za to ve 3. třídě dát výzvu, po tom, co se žáci naučí princip zkoušky u dělení se zbytkem, jestli by v nějakém pracovním sešitě z 2. třídy našli úlohu, kde už tu zkoušku počítali a ani o tom nevěděli.

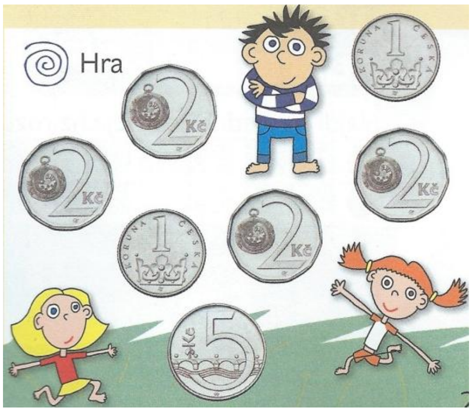
Příloha 8 - Propedeutická úloha, Alter/U/III/s. 44

19. Od čísla 100 odčítej postupně číslo 5 až k číslu 0.

Obrázek 46 - Alter/U/III/s. 44

Zde je uvedena jedna řešitelská strategie, jak řešit úlohy, ve kterých je potřeba dělit. Dělení jako postupné odčítání. Domnívám se ovšem, že zde je tato úloha zvolena spíše pro procvičení operace odčítání, protože jsem nenašla žádnou návaznost nebo výstup, ke kterému by takto formulovaná úloha vedla.

Příloha 9 - Propedeutická úloha, Fraus/PU/II/1. díl/s. 27



Obrázek 47 - Fraus/PU/II/1. díl/s. 27

Většina dětí si ráda hraje na různé obchody, děti rády manipulují s penězi, proto je motivace pro řešení úlohy snadná. Úkolem žáka je nejprve spravedlivě rozdělit peníze mezi 3 děti. Po sečtení mincí vyjde obnos 15 Kč. Řešení úlohy je snadné 15 : 3 = 5. Už zde by se mohla objevit otázka či připomínka žáků, zda je toto rozdělení spravedlivé. Každé z dětí dostane sice 5 Kč, ale jedno z nich dostane pětikorunu a další děti po dvou dvoukorunách a jedné koruně. Žáci by měli říkat argumenty, zda je to spravedlivé či nikoli a jestli v tomto případě jde spíše o počet mincí nebo o celkovou sumu. Každopádně i zde by byl vhodný argument, že v případě vyššího obnosu, zejména při použití bankovek je nepříjemné mít např. 500 Kč v kovových mincích. V rámci mezipředmětových vztahů by zde mohl být prostor pro diskuzi, proč jsou 2 typy peněz – kovové a papírové.

Úlohu je možné ještě rozšířit o otázku, jak by se tento finanční obnos spravedlivě rozdělil mezi dvě děti. To lze numericky zapsat 15 : 2 = 7 (1) a zadání úlohy jednoznačně vybízí k diskuzi ve třídě. Pro názornější představu by bylo vhodné pracovat přímo s mincemi. Jak jsem zmiňovala výše, děti jsou, co se týče peněz, velmi motivované a rozhodně si budou hlídat, aby rozdělení bylo spravedlivé. Proto by mohly přicházet se zajímavými argumenty. Výzva by mohla být, co by bylo potřeba udělat pro to, každé ze dvou dětí dostalo určitý obnos peněz a bylo to spravedlivé. Lze zde sledovat, kdo by třeba myslel na sebe a řekl by, že by si zbylou korunu nechal.

Úloha je zařazena do 2. ročníku a je propedeutického charakteru, připravuje děti na situaci, kdy při dělení nevyjde úplný podíl. Nepředkládá však žádné algoritmy ani závěry. Je zvolena spíše pro diskuzi.

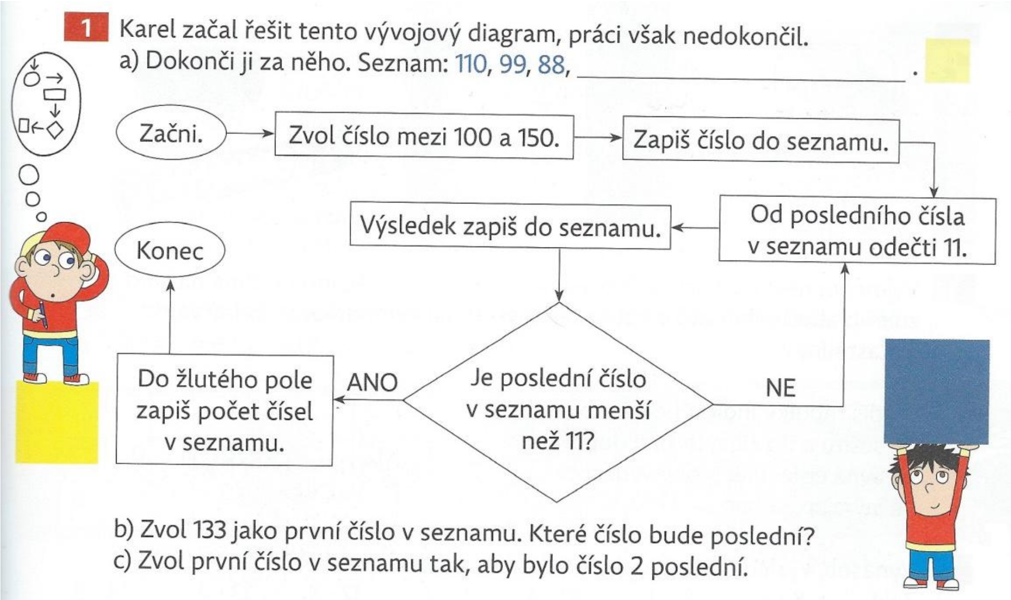
Příloha 10 - Propedeutická úloha, Fraus/PU/II/3. díl/s. 28

Obrázek 48 - Fraus/PU/II/3. díl/s. 28

Úkolem žáků je rozdělit zvířátka do tří stejně silných družstev. V prvním případě to lze, ale ve druhém ne. Druhá úloha tedy nemá řešení. Didaktickým cílem je poznání, že existují úlohy, které nemají řešení. Žáci toto zjištění učiní na základě opakovaného neúspěchu a v metodické příručce je uvedeno, že žáci k úloze napíší „nemá řešení". Tím se toto tvrzení hlouběji utvrdí v žákově vědomí. Další zkušeností bude, že na tři stejné části se dá rozdělit pouze číslo dělitelné třemi. Učitel tento cíl může doplnit výzvou (uvedenou v příručce), které zvířátko je potřeba doplnit k ostatním šesti, abychom mohli skupinu sedmi zvířátek rozdělit na tři stejně silná družstva. Žáci by měli být vyzváni, aby zkusili najít více řešení.

Úloha je propedeutického charakteru a sleduje dva didaktické cíle. Navíc je formulována v sémantickém prostředí, což umocňuje upevnění této situace, kdy úloha neměla řešení, protože žák řeší úlohu pomocí modelů zvířátek a vytváří si vlastní struktury v tomto prostředí. Zkušenost, že úloha nemá řešení je velmi důležitá.

Příloha 11 - Propedeutická úloha, Fraus/U/III/s. 75



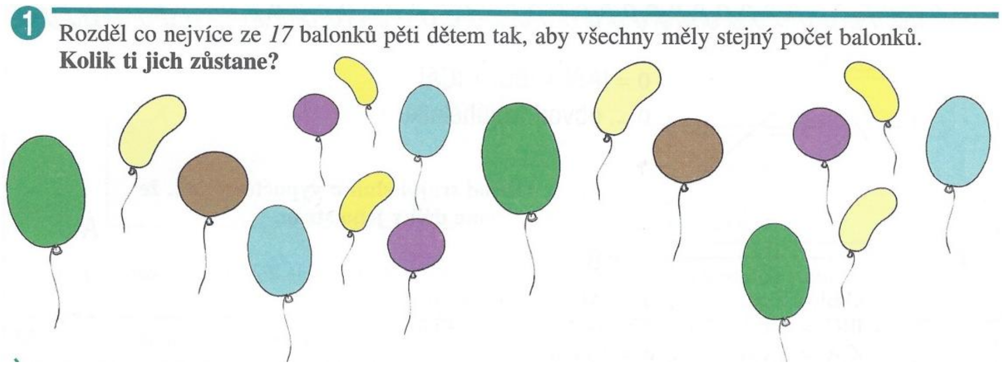
Obrázek 49 - Fraus/U/III/s. 75

Jedná se o propedeutickou úlohu, protože dělení se zbytkem ještě nebylo zavedeno. Žáci zde používají jednu z možných strategií řešení úloh u dělení se zbytkem – postupné odčítání. Úloha je sestavena jako vývojový diagram. Každé políčko má svou úlohu a postupuje se přesně podle šipek a plnění podmínek. Během řešení vývojového diagramu žáci spočítají celou řadu úloh. Je zde patrná i gradace a) dokončení seznamu – jedno řešení, b) zadané počáteční číslo a žáci tvoří seznam sami – jedno řešení, c) žáci mají zvolit počáteční číslo tak, aby splnilo podmínku, zároveň mohou najít více řešení.

V době, kdy je pozornost upřena k počítačům, výpočetní technice a jiné elektronice, je práce s vývojovým diagramem pro děti velmi lákavá a i aktuální. Snadno se dají motivovat právě tím, že budou fungovat jako počítač nebo třeba roboti. V rámci motivace si mohou rozdělit jednotlivé role – ovládací panel, zapisovatel, robot (počítač), atd. Úloha je také vhodná pro práci ve skupině.

Úloha je zařazena 13 stran před tím, než je zaváděno dělení se zbytkem.

Příloha 12 - Slovní úloha, Prodos/U/III/3. díl/s. 52



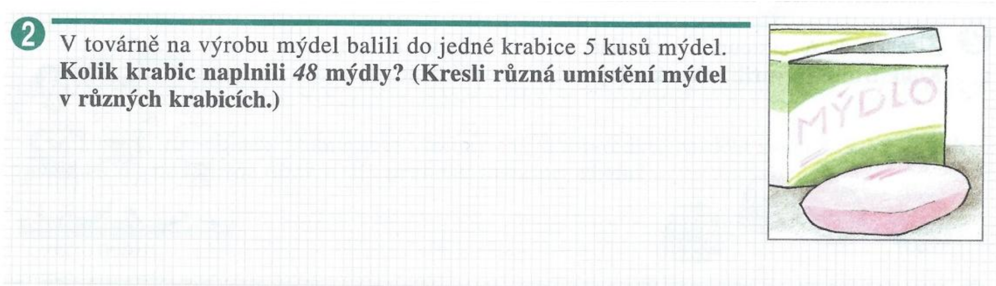
Obrázek 50 - Prodos/U/III/3. díl/s. 52

Úkolem je rozdělit co nejvíce ze 17 balonků pěti dětem tak, aby jich měly všechny stejný počet. Konkrétní výpočet by byl 17 : 5 = 3 (2). Úloha předchází zavedení algoritmu, podle kterého by žáci měli řešit následující úlohy, kde se vyskytne dělení se zbytkem. Autoři dávají žákům možnost využít při řešení úlohy grafické znázornění. Žáci mohou např. jednotlivým dětem balonky přiřazovat, vytvářet skupinky po pěti balonkách nebo volit zcela jiný způsob řešení.

U tohoto cvičení je dobré, že jsou balónky alespoň znázorněny. Pro zavádění dělení se zbytkem si myslím, že by byla ještě vhodnější přímo manipulace. Dala by se využít např. víčka od PET lahví nebo ještě lépe přímo balonky, to by byla pro děti velká motivace. U tohoto grafického znázornění mi přijdou lehce matoucí různé barvy, tvary a velikosti balonků. Protože se mají rozdělit 5 dětem a je tam přímo 5 barev, přičemž žlutých je 6 a hnědé jsou 2. V zadání úlohy je napsáno, že je úkolem rozdělit co nejvíce z balonků pěti dětem tak, aby všechny měly stejný počet. Nevím, zda autor záměrně volil různé velikosti a barvy balonků, aby vznikla diskuze nad tím, zda někdo přiřadí balonky podle barev nebo tvarů, nebo nad tím, zda je toto rozdělení spravedlivé. Jak jsem již zmínila, domnívám se, že tato grafická podoba může být pro někoho bez následného vysvětlení matoucí. Učitel by se každopádně měl ptát na způsoby řešení a třída by měla diskutovat o výhodách či nevýhodách jednotlivých strategií.

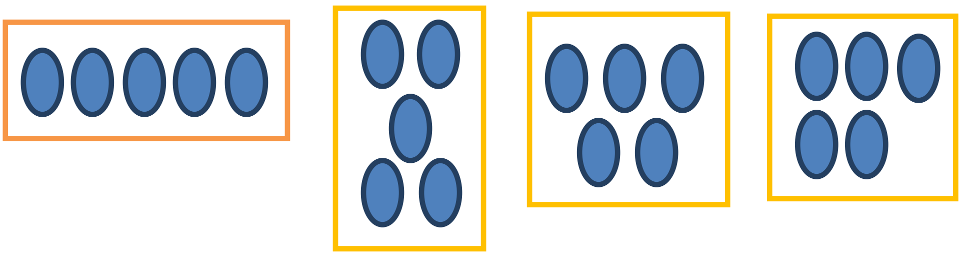
Úloha je nápaditá, protože téma balonků je pro děti atraktivní a je zde možnost je do výuky přímo přinést a později třeba i nafouknout, zároveň si žáci mohou svá řešení hmatatelně a názorně ověřit. Začínají tedy na konkrétní zkušenosti, kterou potom budou umět uplatnit i v abstraktní rovině.

Příloha 13 - Slovní úloha, Prodos/U/III/3. díl/s. 54


2 V továrně na výrobu mýdel balili do jedné krabice *5* kusů mýdel. **Kolik krabic naplnili *48* mýdly? (Kresli různá umístění mýdel v různých krabicích.)**

Obrázek 51 - Prodos/U/III/3. díl/s. 54

Úloha odpovídá procvičování úloh, kde je dělitelem číslo 5. Pro grafické znázornění je počet 48 mýdel poměrně velké číslo a snadno se může stát, že žák udělá z nepozornosti chybu. Zkoušela jsem si graficky balit mýdla do různých krabic a počet 5 kusů mi přišel docela nepraktický, nebyla jsem spokojena s využitím nebo „tvarem“ krabice.



Tento typ návrhu krabic na mýdla by mi přišel smysluplnější u počítání obsahů, kdy by bylo cílem ušetřit co nejvíce místa a navrhnout krabice na mýdla tak, aby byl daný prostor co nejefektivněji využit. Nicméně by bylo zajímavé porovnat různé návrhy krabic žáků a poslechnout si zdůvodnění, proč zvolili právě tuto variantu. Případně si návrhy vybrat a zkoumat, kteří žáci měli shodné nápady, který návrh byl nejčastější.

Pro problematiku dělení se zbytkem je znovu zajímavější část v poznámce, kdy je nejprve položena otázka, kolik krabic by se naplnilo, kdyby v jedné bylo 7 kusů mýdel – opět zadání, které malinko předbíhá. Ale důležitější je druhá otázka, která vede k zamyšlení nad tím, kolik mýdel by museli dávat do každé krabice, aby jim žádné mýdlo nezbylo. Takto formulované zadání žáky vybízí k tomu, aby našli dělitele, který bude dělit číslo 48 beze zbytku. Pokud se žák i učitel spokojí s jedním řešením, svůj cíl splní rychle. Toto rozšíření slovní úlohy by se však dalo využít daleko více. Žáci by mohli společně najít všechna řešení. Proto, aby všechna řešení našli, budou potřebovat vést nějakou evidenci a dílčí výsledky třídit a zaznamenávat. Nakonec by mohli přijít i na nějaké pravidelnosti, které jim pomohou v hledání dalších řešení. Objevují tady mimo jiné možnou záměnu dělitele a podílu.

48 : 1 = 48	48 : 48 = 1
48 : 2 = 24	48 : 24 = 2
48 : 3 = 16	48 : 16 = 3
48 : 4 = 12	48 : 12 = 4
48 : 6 = 8	48 : 8 = 6

Úloha je podle mého názoru vhodně zařazena mezi procvičování algoritmu dělení se zbytkem. Pokud bude učitel brát v potaz rozšíření, které najdeme v poznámce, jedná se o úlohu pro žáka matematicky pestrou. Při hledání dělitele, který bude dělit číslo 48 beze zbytku a za předpokladu, že žák nezná pravidla o dělitelnosti, vyřeší řadu úloh na dělení se zbytkem. Kdyby žáci hledali všechna řešení, bylo by potřeba zavést evidenci, a to znamená, že žáci budou muset jednotlivé výsledky třídit podle kritérií.

Příloha 14 - Slovní úloha, Prodos/U/III/3. díl/s. 54

4 Ve školní jídelně jsou u každého stolku *4* židle. **Jaký nejmenší a jaký největší počet stolků obsadí *29* žáků?**

XIV. Dělení se zbytkem • [1L] Poznáte dříve, než začnete počítat, zda je dělenec dělitelný 5 beze zbytku? Zkuste říct pravidlo. **[2PN]** Kolik krabic by naplnili, kdyby dávali do jedné 7 kusů mýdel? Kolik mýdel by museli dávat do každé krabice, aby jim žádné mýdlo nezbylo? **[4N]** Jaký nejmenší a jaký největší počet stolků by obsadili, kdyby byly židle u stolů po šesti?

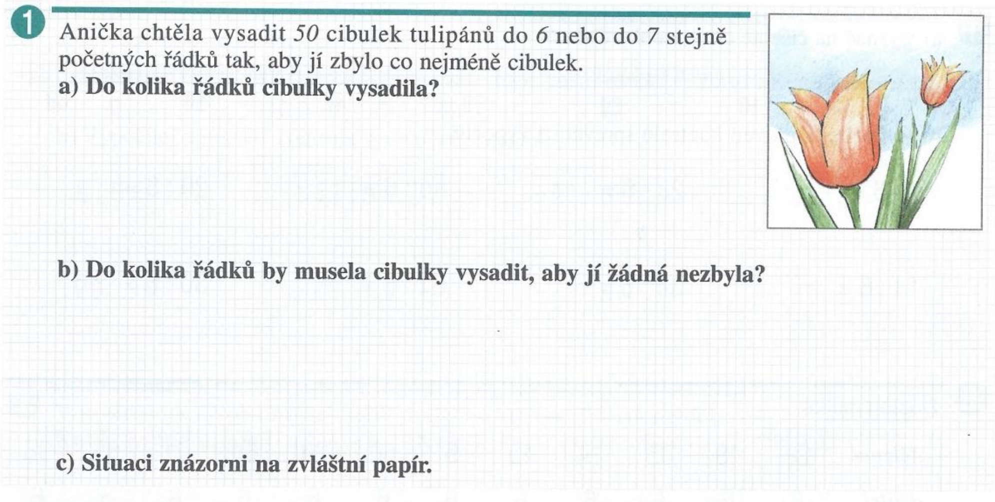
Obrázek 52 - Prodos/U/III/3. díl/s. 54

Úloha zadána tak, že jsou žáci vedeni k tomu, aby našli 2 řešení. Vzhledem k tomu, že se úloha nachází v kapitole Dělení se zbytkem, jedno řešení zřejmě najdou poměrně snadno jako 29 : 4 = 7 (1). Formulování zadání vybízí žáky k přemýšlení, nad tím, jestli je řešení 7 (1) tedy jestli 8 stolů odpovídá nejmenšímu, či největšímu počtu stolů. Druhé řešení by žáci měli odůvodnit spíše po logické úvaze, kdy nejvíce stolků bude obsazeno, pokud u každého bude sedět pouze jeden žák. Numerický zápis by byl složitější, protože žáci zatím dělí pouze jednociferným číslem a pravděpodobně by pro ně zápis 29 : 29 = 1 vypadal na první pohled obtížně.

Cílem je poukázat na rozdíl ve formulaci zadání. Když budu chtít obsadit nejmenší počet stolů, jak toho docílím? Bude potřeba, aby byla využita všechna místa u jednoho stolu a až po plném obsazení jednoho stolu budu obsazovat další stoly. V konstruktivistickém pojetí by mohli žáci úlohu řešit graficky – kreslili by stoly a postupně by je obsadili. Další možností by bylo manipulativní řešení např. víčka od PET lahví. U obou z nich by jim jasně vyšlo, že je potřeba nejméně 8 stolů. Pokud bychom úlohu řešili jen početně 29 : 4 = 7 (1), je zde nebezpečí, že se spokojíme s tím, že nám vyšlo 7 stolů a omylem zapomeneme na zbytek (1), protože za pouhým číslem nemusíme vidět žáka, jak tomu bylo při názorných řešeních. Nejvyšší počet stolků by podle mě měl být 29, kdy u každého stolku bude sedět jen jeden žák. V tomto případě je také vhodný prostor pro diskuzi, aby žáci mohli spolužákům představit, k jakému nejvyššímu počtu stolků se dopočítali. K otázkám pod čarou by bylo zajímavé se zeptat, zda se změní nejmenší a největší počet stolků, pokud u každého stolu bude místo 4 židlí 6. Zajímavý by byl odhad (když navýšíme počet míst u stolku, jestli budeme potřebovat více nebo méně stolků při stejném počtu žáků) a potom následné řešení a zdůvodnění, proč se největší počet stolků nezměnil. Děti by mohly formulovat, na čem závisí největší počet stolků – na počtu žáků.

Zadání úlohy vybízí žáky k dalšímu přemýšlení nad úlohou, nebudou se moci spokojit pouze s naučeným postupem řešení, ale budou muset hledat ještě další. Právě přímo dvě otázky v zadání představují potenciál, který úloha nabízí k diskuzi a hledání obou řešení.

Příloha 15 - Slovní úloha, Prodos/III/3. díl/s. 56



1 Anička chtěla vysadit *50* cibulek tulipánů do *6* nebo do *7* stejně početných řádků tak, aby jí zbylo co nejméně cibulek.

a) Do kolika řádků cibulky vysadila?

b) Do kolika řádků by musela cibulky vysadit, aby jí žádná nezbyla?

c) Situaci znázorni na zvláštní papír.

Obrázek 53 - Prodos/III/3. díl/s. 56

a) Zde je nám předloženo zajímavě formulované zadání, kdy se dá porovnávat odhad žáků. Bude výhodnější vysadit tulipány do 6 nebo7 stejně početných řádků tak, aby zbylo co nejméně cibulek? Úloha se dá řešit početně i graficky. Pro grafické znázornění je asi nejjednodušší metoda přiřazování, kdy si zvolíme 6 nebo 7 řádků a jednotlivé cibulky přiřazujeme. 50 cibulek je ovšem poměrně vysoké číslo pro znázornění a pro ověření obou možností by žák musel graficky znázornit 100 cibulek. Početní řešení bude rychlejší 50 : 6 = 8 (2) a 50 : 7 = 7 (1). Zajímá nás, které z čísel 6 a 7 dělí číslo 50 s menším zbytkem.

Rozšíření úlohy v poznámce: Jak by mohla Anička vysadit cibulky do 6 nebo 7 stejně početných řádků, kdyby jich měla jen 40? 40 : 6 = 6 (4), 40 : 7 = 5 (5)

b) Do kolika řádků by musela cibulky vysadit, aby jí žádná nezbyla? V tomto případě žák hledá dělitele, který dělí číslo 50 beze zbytku. Celkem 6 řešení, v zadání však není žádná výzva ke hledání všech řešení.

50 : 1 = 50	50 : 50 = 1
50 : 2 = 25	50 : 25 = 2
50 : 5 = 10	50 : 10 = 5

c) Žák má situaci znázornit na zvláštní papír. Mohl by to být úkol pro skupinovou práci, kdy by za skupinu měli najít a znázornit co nejvíce řešení. Protože budou řešení graficky znázorněna, lze diskutovat nad tím, že početně nám vychází 6 různých řešení, ale graficky pouze 3, protože je můžeme pouze otočit, pokud budeme dělat stejné mezery mezi jednotlivými cibulkami. Situace může vést i k diskuzi nad tím, kdy je výhodnější mít záhon s 1 řádkem po 50 cibulkách (např. podél plotu) nebo 5 řádků po 10 cibulkách.

Úloha je zadána tak, abychom a) porovnali 2 různá řešení a podle zadání odůvodnili, které řešení je pro danou situaci vhodnější. Žák se musí na základě určitých podmínek rozhodnout a své rozhodnutí by měl podložit konkrétním řešením. U b) chybí výzva, aby žáci hledali více řešení. Úloha je opět trochu jinak formulovaná, což je dobře, že všechny slovní úlohy nejsou zadané naprosto totožně. Dále se domnívám, že úkol, který je zadaný c) – Situaci znázorni na zvláštní papír. – by měl být zadán zároveň s úkolem b), protože znázornění je daleko zajímavější, když vidíme postup, jakým se žáci k řešení dobrali. Papíry se znázorněním by se měly ve třídě vystavit a žáci by hledali další řešení. Porovnávali by, zda je jejich řešení totožné, či objevili další. Pokud by žáci během vyučovací hodiny nenašli všechna řešení, měli by mít objevená řešení někde na očích, aby mohli nad úlohou ještě přemýšlet.

Způsoby řešení by mohly být zajímavější, kdyby autoři tuto úlohu zařadili mimo kapitolu Dělení se zbytkem, protože při postupném řešení všech úloh z této kapitoly dochází ke značné automatizaci postupu řešení a žák se nemusí tolik zamýšlet, proč úlohu řeší zrovna tímto způsobem.

Příloha 16 - Slovní úloha, Prodos/III/3. díl/s. 57

3 **a) Kolik kytic uvázala zahradnice ze *70* růží, jestliže dávala do každé kytice po *8* růžích?**

b) Kolik kytic by uvázala, kdyby dávala do každé kytice *9* růží?

Obrázek 54 - Prodos/III/3. díl/s. 57

a) Záměrem je pravděpodobně upevnění postupu dělení se zbytkem. Vzhledem k tomu, že je to již 6. strana v pořadí se stejnou tematikou, žák bude vědět, jak tuto úlohu řešit. 70 : 8 = 8 (4).

b) Kolik kytic by zahradnice uvázala ze 70 růží, kdyby dávala do každé kytice 9 růží? Opět stejný postup řešení, jen změníme dělitele, konkrétně 70 : 9 = 7 (7).

V poznámce máme ještě možnost rozšířit slovní úlohu o další otázku: Po kolika růžích by musela dát zahradnice do kytic, aby jí ze 70 růží žádná nezbyla? Zkuste najít více řešení. Poprvé se nám objevuje pokyn k tomu, abychom zkusili najít více řešení.

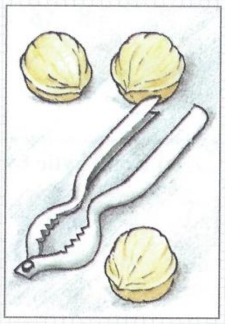
70 : 1 = 70	70 : 70 = 1
70 : 2 = 35	70 : 35 = 2
70 : 5 = 14	70 : 14 = 5
70 : 7 = 10	70 : 10 = 7

Před vlastním řešení úlohy b) by zde byla na místě otázka, jestli si žáci myslí, že by kytic uvázala více nebo méně než v předchozím zadání, kdy do každé kytice dávala 8 růží. Některý žák v tomto případě může být lehce antisignálem zmaten – přidávám růži do kytice, ale nakonec jich udělám méně. Svůj odhad by žáci měli zdůvodnit. Poté by následoval výpočet. Početní úkony, kdy je dělitelem dvojciferné číslo, žáci ještě nemají zavedené. Je zde důležité, aby si uvědomili, že z jednoho výpočtu můžeme získat dvě řešení. Např. 70 : 7 = 10 můžeme uvázat 7 kytic po 10 růžích nebo 10 kytic po 7 růžích. Dalším důležitým bodem je objevení momentu, kdy se nám řešení láme a bude opakovat. V tomto případě, když se přehoupne dělitel přes 10, nemusíme dělit 11, 12, 13, … ale využijeme znalosti toho, že když prohodíme dělitele a podíl, najdeme zbylá řešení. Tyto dva poznatky jsou zásadní při hledání všech řešení, které splňují dané podmínky. Úloha zároveň obsahuje propedeutiku dělitelnosti. Žáci postupně získávají zkušenosti, zde např., že číslo, které končí 0, bude dělitelné 5 a 10 beze zbytku.

Úloha je zařazena ke konci kapitoly Dělení se zbytkem ve 3. ročníku. Velmi záleží na učiteli, zda úloha bude sloužit jen jako procvičení algoritmu dělení se zbytkem, nebo jestli se využije potenciál, kdy úloha může rozvíjet odhad, propedeutiku dělitelnosti, či schopnost hledat všechna řešení. Jen by této úloze měla předcházet podobná úloha, kde bude dělenec menší číslo, aby si žáci mohli ověřit, že našli všechna řešení a mohli třeba objevit způsoby, které jsou pro hledání všech řešení důležité.

Příloha 17 - Slovní úloha, Prodos/U/III/3. díl/s. 58

4 Jestliže podělím své děti spravedlivě třiceti osmi ořechy, dostane každé z nich *9* ořechů a *2* ořechy mi zbydou. Kdybych chtěla dát každému z nich *10* ořechů, *2* ořechy by se mi nedostaly. **Kolik mám dětí?**



Obrázek 55 - Prodos/U/III/3. díl/s. 58

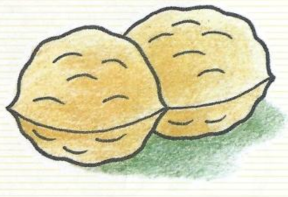
Pro tuto učebnici je úloha netradičně formulovaná. Při přečtení zjistíme, že jsou tam „nadbytečné“ informace. Byli bychom přece schopni vyřešit úlohu z těchto informací: celkem 38 ořechů, každý dostane 9 ořechů, 2 ořechy zbudou. Kolik mám dětí? 38 – 2 = 36, 36 : 9 = 4, z toho plyne, že mám 4 děti. Zápis, pokud bych se zabývala druhou informací: celkem 38 ořechů, každý dostane 10 ořechů, 2 ořechy chybí. Kolik mám dětí? 38 + 2 = 40, 40 : 10 = 4, mám 4 děti. V poznámce je výzva pro žáky, aby porovnali způsoby svých řešení, a mají hledat právě to nejvýhodnější. Poprvé jsou zde žáci vyzváni k diskuzi.

Jedná se o vhodně zařazenou slovní úlohu na konec tematického celku dělení se zbytkem. Žák zde musí vyhodnotit, které informace potřebuje k výpočtu a jak bude úlohu řešit

Ve 3. dílu učebnice pro 3. ročník byly dělení se zbytkem věnovány strany 52-58. Je zde vidět, že autorům učebnice jde o důsledné procvičení daného algoritmu, protože se na těchto stranách naprosto minimálně vyskytují úlohy zaměřené na jiné matematické oblasti. Po tomto intenzivním procvičování již ve 3. ročníku nenajdeme úlohy, kde by se vyskytovala problematika dělení se zbytkem.

Příloha 18 - Slovní úloha, Prodos/U/IV/1. díl/s. 23

3 ! Kolik kamarádů můžeš podělit *78* ořechy tak, aby každý dostal stejně a žádný ořech nezbyl?



Obrázek 56 - Prodos/U/IV/1. díl/s. 23

Autoři učebnice nás v této úloze vyzývají k tomu, abychom zjistili, kolik kamarádů můžeme podělit 78 ořechy tak, aby každý dostal stejně a žádný ořech nezbyl. Výsledkem bude úplný podíl, ale při hledání řešení pravděpodobně narazíme na dělení, které bude se zbytkem. V zadání máme uvedeného pouze dělence a úkolem je zjistit dělitele. K tomu, abychom mohli splnit podmínku o úplném podílu, musíme zjistit i podíl. To znamená, že v úloze máme dvě neznámé, konkrétně 78 : x = y.

Na první pohled vypadá formulace úlohy docela složitě a leckdo by si mohl říct, že najít řešení bude obtížné. Přeci jen se nám tu objevují dvě neznámé. Pokud žák bude postupovat hledáním dělitele od čísla 1, řešení nalezne snadno: 78 : 1 = 78. Toto řešení sice odpovídá matematickému zápisu 78 : x = y, ale v zadání je napsáno: Kolik kamarádů můžeš podělit? Slovo kamarádů je psáno v množném čísle, proto řešení, kde vyjde podíl 1, neodpovídá zadání a žák musí pokračovat v hledání dál. Pokud bude žák systematicky pokračovat dál a zvolí si jako dělitele číslo 2, vyjde mu 78 : 2 = 39. V tomto případě už podmínku splnil, protože nalezl úplný podíl. V zadání není uvedeno, že by žáci měli hledat více řešení, proto nalezením jednoho řešení splnili zadání úlohy a k dělení se zbytkem se vůbec nedostali. Nabízí se otázka, jak formulovat zadání tak, aby žáci hledali více řešení a při počítání užili i dělení se zbytkem. Za předpokladu, že by žáci postupovali systematicky a vždy zvětšovali dělitele, nabízel by se nejjednodušší způsob formulování zadání: Kolik nejvíce kamarádů můžeš podělit 78 ořechy tak, aby každý dostal stejně a žádný ořech nezbyl? Ale na toto zadání lze rychle najít odpověď 78 : 78 = 1. Kdybychom upravili podmínku, že každý kamarád bude mít více než 1 ořech, žáci by hned vyzkoušeli dosadit za podíl 2, prozradili bychom tím jednu ze dvou neznámých. 78 : x = 2 a ve výsledku 78 : 39 = 2. Žáci by sice našli řešení, ale opět by to bylo bez dělení se zbytkem. Zadání úlohy je formulováno neurčitě. Mohu podělit 2 kamarády a mám splněno, ale zadání lze pochopit i tak, že budu hledat více řešení nebo dokonce všechna řešení. K hledání všech řešení je potřeba zvolit evidenci řešení tak, abychom v určitou chvíli mohli říct, že jsme našli všechna řešení. Při řešení jsem postupovala takto

78 : 1 = 78	78 : 2 = 39	78 : 3 = 26	78 : 4 = 19 (2)
78 : 5 = 15 (3)	78 : 6 = 13	78 : 7 = 11 (1)	78 : 8 = 9 (6)
78 : 9 = 8 (6)			

Proto, abychom našli všechna řešení je potřeba postupně zvyšovat dělitele až do chvíle, kdy bude neúplný podíl menší než dělitel.

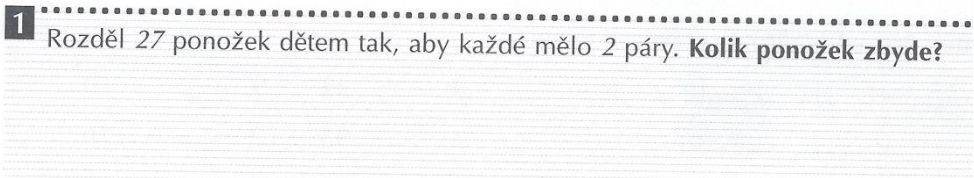
Vypíšeme řešení, která vyhovovala zadání, tedy vyšla beze zbytku a ke každému přidáme ještě řešení, kdy vyměníme dělitele a podíl:

78 : 1 = 78	78 : 2 = 39	78 : 3 = 26	78 : 6 = 13
78 : 78 = 1	78 : 39 = 2	78 : 26 = 3	78 : 13 = 6

Jak jsem již zmínila výše, hledáme počet kamarádů, proto řešení 78 : 78 = 1 nebude vyhovovat zadání. Úloha má celkem 7 řešení.

Autoři tuto slovní úlohu zařadili do 4. ročníku ještě před kapitolu Dělení se zbytkem. Žák již zná řešitelské strategie z předchozího školního roku, kdy se dělení se zbytkem zavádělo, ale na druhou stranu ještě nebylo po prázdninách procvičeno. Vzniká zde prostor pro hledání vlastních řešitelských strategií. Pokud bude učitel chtít, může vytvořit kaskádu gradovaných úloh tím, že bude žáky vyzývat k tomu, aby hledali další řešení. Nejobtížnější bude zdůvodnit, zda našli všechna řešení. Najít všechna řešení bude vyžadovat více počítání a v průběhu řešení se žák setká právě i s neúplným podílem.

Příloha 19 - Slovní úloha, Prodos/U/IV/1. díl/s. 31



1 Rozděl *27* ponožek dětem tak, aby každé mělo *2* páry. **Kolik ponožek zbyde?**

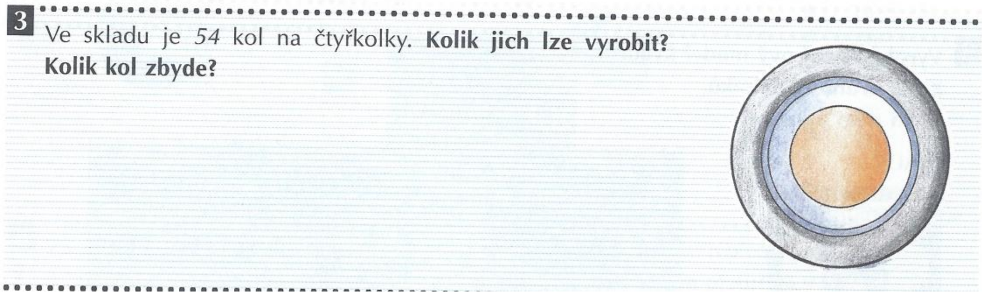
Obrázek 57 - Prodos/U/IV/1. díl/s. 31

Žáci mají za úkol rozdělit 27 ponožek dětem tak, aby každé mělo 2 páry. Otázka zní, kolik ponožek zbude. Úloha je zadána velmi jednoduše, ale skrývá v sobě podstatnou informaci, kterou je potřeba postřehnout pro to, aby žáci dospěli ke správnému výsledku. Je potřeba si uvědomit, že každé dítě má mít dva páry ponožek, což znamená, že každé dítě bude mít 4 ponožky. Správné řešení je 27 : 4 = 6 (3), zbudou tedy 3 ponožky. V poznámce je rozšíření úlohy o otázku: Kolik dětí bude mít na nohou (jedny) ponožky, když je možné podělit se o 33 ponožek? V tomto případě je myšleno, že každé dítě bude mít jeden pár, tedy 33 : 2 = 16 (1).

Takto formulované zadání může být zrádné pro žáky, kteří se naučili řešit úlohy tak, že používají jeden princip, řeší úlohy rychle a nezamýšlejí se hlouběji nad zadáním. Pokud by řešili úlohu takto, automaticky by počítali takto 27 : 2 = 13 (1). Úloha by se mohla využít i jako diagnostický nástroj ve smyslu, jak čtou žáci zadání slovní úlohy s porozuměním. Numericky není úloha obtížná, ale je potřeba zpracovat informaci, že se jedná o 2 páry ponožek pro každé dítě.

U této slovní úlohy se mi velmi líbí, že v jejím zadání je schovaná podstatná informace pro její řešení. Nejedná se tedy pouze o procvičování dělení se zbytkem, ale je zde potřeba pořádně analyzovat zadání. Úloha by mohla být zrádná pro žáky, kteří počítají tzv. na rychlost a za krátký čas chtějí mít vyřešeno co nejvíce úloh. Uvidí v zadání čísla 27, 2 a otázku na zbytek a automaticky použijí číslo 2 jako dělitele.

Příloha 20 - Slovní úloha, Prodos/U/IV/1. díl/s. 31


3 Ve skladu je *54* kol na čtyřkolky. **Kolik jich lze vyrobit? Kolik kol zbyde?**

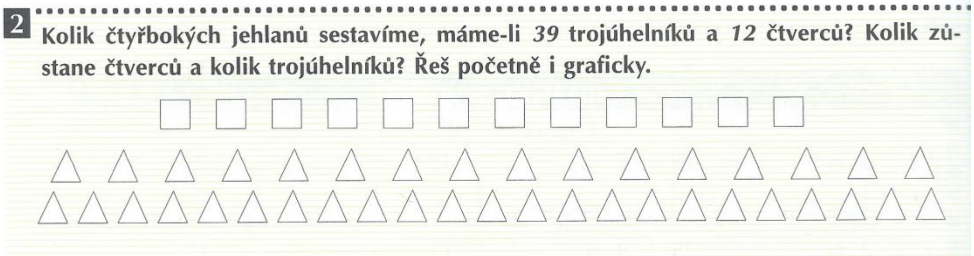
Obrázek 58 - Prodos/U/IV/1. díl/s. 31

Ve skladu je 54 kol na čtyřkolky. Kolik jich lze vyrobit? Kolik kol zbude? Slovní úloha, kde se nás autoři ptají na neúplný podíl a zbytek. Úloha je malinko obtížnější, protože opět trochu vybočuje ze stereotypu, který byl zažitý v řadě učebnic nakladatelství Prodos. V tomto případě jde o to, že dělenec přesahuje obor malé násobilky. Žáci budou muset hledat své řešitelské strategie k tomu, aby dospěli k výsledku. Řešení bude 54 : 4 = 13 (2), tzn. lze vyrobit 13 čtyřkolek a 2 kola zbydou.

Učitel by měl dát prostor, aby žáci mohli představit své řešitelské strategie. Jednou z možných variant může být, že si žáci uvědomí, že na výrobu 10 čtyřkolek je potřeba 40 kol. Z původních 54 jich po odečtení zbyde 14 a 14 : 4 = 3 (2) je už snadné vyřešit. Někdo může úlohu řešit graficky, kdy bude použitá kola škrtat. Další možností je postupné odčítání, či říkání si řady násobků 4. Mohla by vzniknout i diskuze o tom, která strategie byla nejrychlejší, nejvhodnější, nejsrozumitelnější a proč.

Úloha je zařazena do kapitoly dělení se zbytkem, nicméně její dělenec je mimo obor malé násobilky, proto žáci nemohou úplně spoléhat na znalost násobilky a budou muset přemýšlet, jak úlohu vyřešit. V tomto případě se nabízí více možností a je potřeba žáky ujistit, že žádná z nich rozhodně není špatná. Žáci by měli dostat prostor prezentovat svá řešení a zdůvodnit, proč užili při řešení daný postup. Při tomto přístupu lze i v celkovém tradičním pojetí matematiky v této řadě učebnic vést děti ke konstruktivistickému přístupu k řešení úlohy. Je dobře, že se tato úloha objevila ještě před zavedením písemného dělení, kdy je dělenec mimo obor malé násobilky a děti tak nemohou využít pouze namemorované znalosti.

Příloha 21 - Slovní úloha, Prodos/U/IV/1. díl/s. 32


2 **Kolik čtyřbokých jehlanů sestavíme, máme-li *39* trojúhelníků a *12* čtverců? Kolik zůstane čtverců a kolik trojúhelníků? Řeš početně i graficky.**

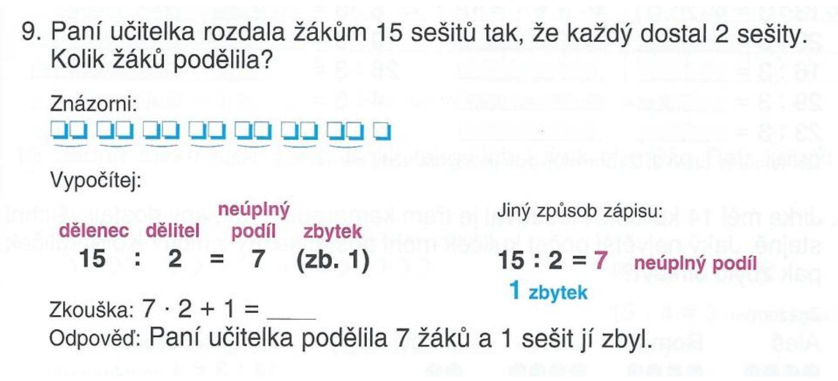
Obrázek 59 - Prodos/U/IV/1. díl/s. 32

Úloha, kde se propojuje geometrie s aritmetikou. Žák si musí nejprve uvědomit, jak vypadá povrch čtyřbokého jehlanu. Skládá se z čtvercové podstavy, a jelikož je čtyřboký, jeho stěny budou tvořit 4 trojúhelníky. Žáci mají řešit početně i graficky úlohu, kdy máme zjistit, kolik sestavíme čtyřbokých jehlanů z 39 trojúhelníků a 12 čtverců a kolik čtverců a trojúhelníků nám zbude. Grafické řešení bude pro žáky snadné, stačí ke každému čtverci přiřadit 4 trojúhelníky a hned uvidí, že zbydou 3 čtverce a 3 trojúhelníky. Početní řešení nabízí různé strategie řešení např. 39 : 4 = 9 (3), tím žák zjistí, na kolik jehlanů budou stačit trojúhelníky. Když ví, že na každý jehlan je potřeba 1 čtverec a ví, že trojúhelníky vystačí na 9 jehlanů, odečte tyto jehlany od celkového počtu čtverců 12 – 9 = 3 a vyjdou mu zbylé čtverce.

V této úloze musí žák spojit znalosti z geometrie a zároveň má graficky a početně řešit, kolik čtverců a trojúhelníků zbude. Početní postupy řešení asi budou u dětí různé. Učitel by mohl ještě reagovat na sestavování jehlanů tím, že by žáci mohli vymýšlet střihy pro jehlany. Zalaminované čtverce a trojúhelníky by k sobě slepovali izolepou. Možnost práce s úlohou můžeme rozšířit otázkou: Kdybychom chtěli využít všechny čtverce, kolik bychom ještě museli přidat trojúhelníků?

Úloha je zařazena do kapitoly Dělení se zbytkem v učebnici pro 4. ročník. Líbí se mi, že jsou v ní propojeny různé matematické oblasti. Díky tomu bylo i pro mě zajímavější úlohu řešit. Vybočuje ze stereotypu, ke kterým některé úlohy při dělení se zbytkem vedou. Ještě by bylo vhodné využít tento geometrický obsah, a pokud není čas v matematice, tak třeba při světu práce se k povrchu čtyřbokého jehlanu vrátit.

Příloha 22 - Slovní úloha, Alter/U/III/s. 113


9. Paní učitelka rozdala žákům 15 sešitů tak, že každý dostal 2 sešity. Kolik žáků podělila?

Znázorni:

Vypočítej:

dělenec dělitel neúplný podíl zbytek

15 : 2 = 7 (zb. 1)

Jiný způsob zápisu:

15 : 2 = 7 neúplný podíl

1 zbytek

Zkouška: 7 · 2 + 1 = ____

Odpověď: Paní učitelka podělila 7 žáků a 1 sešit jí zbyl.

Obrázek 60 - Alter/U/III/s. 113

Žáci se v této slovní úloze seznamují s dělením se zbytkem a hned jsou vedeni k tomu, aby dělali zkoušku. Není zde vůbec ukázáno, co které číslo ve zkoušce představuje, chybí tam naznačení vazby, že násobím neúplný podíl s dělitelem a potom přičtu zbytek. Zároveň se zde představují dva možné numerické zápisy dělení se zbytkem. Celá úloha je vyřešena – žák tedy vidí, jak by měl řešit úlohy, kde se vyskytuje dělení se zbytkem.

Takto zadaná úloha vede k upevnění si algoritmu, ale obávám se, že žáci v tuto chvíli pouze procvičují látku, které příliš neporozuměli. Daleko zajímavější by bylo dát žákům výzvu, jak bychom si mohli ověřit, zda jsme počítali správně. Jestli by našli způsob, jak provést zkoušku. A pro oživení hodiny by vůbec neškodilo si celou situaci sehrát, kdy by se ze třídy vybral jeden žák, který by představoval učitelku, které má rozdat každému z žáků 2 sešity až do té doby, co to půjde. Potom by mohla následovat výzva, kolik by musel mít paní učitelka sešitů, aby všichni žáci ze třídy dostali 2 sešity a 1 zbyl stejně jako v zadání. Museli by jednoho žáka dát do role učitelky a počet zbylých žáků vynásobit dvěma a přičíst zen jeden zbylý sešit. Tím by vlastně objevili princip zkoušky.

Úloha je zařazena a koncipována tak, aby byli žáci seznámeni se zkouškou, ale celá slovní úloha je zadaná tak, že je vlastně žákům předložena v podstatě vyřešená. Jediným úkolem žáků je vyřešit 7 * 2 + 1 = 15. Znázornění, výpočet, odpověď jsou předloženy jako hotová věc. Úloha má transmisivní charakter, žák se stává pouze konzumentem předložených poznatků. Je seznámen, jak vypadá zkouška a od této chvíle po něm bude ve slovních úlohách i početních úlohách vyžadována. V úloze jsou použity rovnou 2 možné zápisy dělení se zbytkem. Pro zavádění této problematiky se domnívám, že je příliš brzy, aby se žáci hned v první slovní úloze, která se dělení se zbytkem věnuje, seznámili hned se třemi novými způsoby ať už zápisu nebo zkoušky.

Příloha 23 - Slovní úloha, Alter/U/III/s. 119

37. Do jídelny přivezli 30 židlí a dávali je ke stolům po čtyřech. Ke kolika stolům židle umístili a kolik židlí jim zbylo?

Obrázek 61 - Alter/U/III/s. 119

Slovní úloha, která vede k numerickému zápisu 30 : 4 = 7 (2). Takto zadaná slovní úloha by neměla žákům dělat po procvičování na předchozích stranách potíže.

Úloha by mohla být doplněna otázkou – Kolik židlí by muselo být u jednoho stolu, aby jim žádná židle nezbyla? Tato otázka by vedla k více řešením:

1 židle	=>	30 stolů	30 židlí	=>	1 stůl
2 židle	=>	15 stolů	15 židlí	=>	2 stoly
3 židle	=>	10 stolů	10 židlí	=>	3 stoly
5 židlí	=>	6 stolů	6 židlí	=>	5 stolů

Zajímavé by bylo sledovat, které řešení by žáci objevili jako první, které řešení by se u nich vyskytovalo nejčastěji. Díky doplňující otázce by žáci objevovali prvky z matematické oblasti dělitelnosti.

Příloha 24 - Úloha numerická, Alter/U/III/s. 122

51. Děl postupně čísla: a) od 10 do 20 třemi (šesti),
b) od 20 do 30 čtyřmi (osmi),
c) od 40 do 50 pěti (šesti, devíti).

Obrázek 62 - Alter/U/III/s. 122

Úloha, kde mají žáci postupně dělit a) čísla od 10 do 20 třemi (šesti).

10 : 3 = 3 (1)	10 : 6 = 1 (4)
11 : 3 = 3 (2)	11 : 6 = 1 (5)
12 : 3 = 4	12 : 6 = 2
13 : 3 = 4 (1)	13 : 6 = 2 (1)
14 : 3 = 4 (2)	14 : 6 = 2 (2)
15 : 3 = 5	15 : 6 = 2 (3)
16 : 3 = 5 (1)	16 : 6 = 2 (4)
17 : 3 = 5 (2)	17 : 6 = 2 (5)
18 : 3 = 6	18 : 6 = 3
19 : 3 = 6 (1)	19 : 6 = 3 (1)
20 : 3 = 6 (2)	20 : 6 = 3 (2)

Úloha je zadána pro tuto učebnici trochu netradičně. Přestože se jedná o procvičování dělení se zbytkem, nejsou zde připravené sloupečky ani tabulky, které by žáci museli vyplňovat. Zadání je psáno tak, že je tam kombinace číslovek psaných čísly a slovy. Žák pochopí, co je jeho úkolem, najde si vlastní způsob zápisu. Domnívám se, že v zadání úlohy chybí to nejpodstatnější. Opravdu chceme jen procvičovat dělení se zbytkem jako na předešlých stranách v učebnici? Tato úloha přece nabízí daleko větší potenciál. Třeba konkrétně v zadání a). Učitel by se měl zeptat žáků, zda objevili při počítání nějakou pravidelnost a zda ji dokáží popsat spolužákům. Dalo by se na základě pozorování nějaké pravidelnosti říct, které další číslo bude při dělení 6 vycházet beze zbytku? Úloha vede k tomu, aby si žáci uvědomili, že pokud je číslo dělitelné 6 beze zbytku, bude dělitelné i 3 beze zbytku. Další možností, jak využít tuto úlohu a nechat žáky počítat individuálně podle jejich možností je výzva, aby našli co nejvyšší číslo, které bude dělitelné třemi i šesti zároveň. Tyto rozšiřující úlohy vedou k propedeutice dělitelnosti. A pokud dítě bude získávat zkušenosti se znaky dělitelnosti, později je díky tomu dokáže určit, kdy se jedná o dělení se zbytkem, kdy je možnost např. v rovnicích a výrazech krátit atd.

Úloha je v učebnici zařazena až po několika stranách zavádění a procvičování dělení se zbytkem. Domnívám se, že by úloha mohla být zařazena i dříve a oživila by tím značně stereotypní stránky. Úloha tak, jak je zadaná, nevyužívá vše, co v sobě nabízí. Pokud jde o procvičování dělení se zbytkem, tomu je věnováno v učebnici hodně prostoru. Kdyby tam byly napsány i doplňující otázky, aby žáci hledali pravidelnosti, odhadovali, prověřovali, mohli by zažít pocit, že na něco přišli a nemuseli by fungovat jen způsobem – zde máte návod, jak úlohy řešit a při dodržení postupu řešení, získáte výsledek.

Příloha 25 - Slovní úloha, Alter/U/III/s. 122

53. Klárka slavila narozeniny. Měla bonboniéru, ve které bylo 5 řad bonbónů po čtyřech. Rozdala je třem kamarádkám tak, že měly všechny stejně. Kolik bonbónů dostala každá kamarádka? Kolik bonbónů zůstalo Klárce?

Obrázek 63 - Alter/U/III/s. 122

Slovní úloha, která k vyřešení potřebuje více matematických operací než jen dělení se zbytkem. Nejprve musí žáci vypočítat, kolik je v bonboniéře bonbónů. 5 * 4 = 20 a tyto bonbóny rozdala třem kamarádkám tak, že měly všechny stejně. Otázky zní, kolik bonbónů dostala každá kamarádka a kolik bonbónů zůstalo Klárce. Zde záleží na tom, jestli žáci budou ze zadání cítit, že Klárka rozdala co nejvíce bonbónů, v tom případě by bylo řešení jednoznačné. 20 : 3 = 6 (2). Každá z kamarádek by dostala 6 bonbónů a Klárce by zbyly 2 bonbóny. Jiná situace by nastala, pokud by žáci pochopili, že kamarádky dostaly stejný počet bonbónů, v tomto případě bychom našli více řešení.

celkový počet bonbónů	každá kamarádka	Klárce zbylo
20	1	17
20	2	14
20	3	11
20	4	8
20	5	5
20	6	2

Následovat by mohla diskuze, které řešení se dětem zdá nejspravedlivější a které řešení je podle zadání nejpravděpodobnější.

Úloha, kde je potřeba více matematických operací, je úlohou gradovanou. Žák musí číst zadání s porozuměním, aby věděl, co které číslo v úloze znamená a jak se postupnými kroky dobrat k výsledku. Žák musí přemýšlet i nad sledem výpočtů. Pokud by úloha byla pro některé žáky nepředstavitelná, bylo by vhodné pomocí manipulace úlohu zdramatizovat. Žáci by mohli opět využít víčka od PET lahví.

Příloha 26 - Slovní úloha, Alter U/IV/s. 26

26. Jeden rok má 365 dnů. Kolik je to týdnů?

Obrázek 64 - Alter U/IV/s. 26

Slovní úloha, kdy se počítají týdny v roce. Žák si musí uvědomit, že týden má 7 dní. Žák 4. třídy ví, kolik má rok dní, proto je informace, že rok má 365 dnů nadbytečná.

Zároveň by se některé děti mohly ohradit, že rok může mít i 366 dnů. Zde by mohla vyvstat otázka, jestli to bude mít vliv na počet celých týdnů. Nejprve by vyřešily, počet týdnů pro 365 dnů. Výsledek je 52 (1). Následovala by otázka, jak to bude pro 366 dnů? Děti by mohly říkat názory, kolik to bude týdnů. Přesvědčí se nakonec výpočtem 366 : 7 = 52 (2). Toto rozšíření úlohy vede k tomu, že by žáci sledovali pravidelnost, zvýším dělence o 1 a zbytek se také zvýší o 1. Mohla by následovat otázka, zda mohu dělence libovolně zvětšovat, aniž by se změnil neúplný podíl. To by vedlo k uvědomění si, že zbytek nemůže být větší než dělitel. Vše by ale bylo demonstrováno na konkrétní slovní úloze a ne jen oznámeno větou v učebnici, že zbytek musí být vždy menší než dělitel.

Úloha je zařazena jako poslední slovní úloha v rámci kapitoly, která se věnuje písemnému dělení jednociferným číslem. Pro procvičení dělení dělencem 7 je vhodně zvolena, ale úloha nabízí víc, než je zde v učebnici využito.

Příloha 27 - Numerická úloha, Alter/U/IV/s. 27

33. Číslo 1 000 děl postupně čísly 2, 3, 4, …, 9.

Obrázek 65 - Alter/U/IV/s. 27

Žáci mají za úkol dělit číslo 1000 postupně čísly 2, 3, 4, …, 9. Úloha je zaměřena na procvičení písemného dělení jednociferným číslem.

Pokud by žáci svá řešení evidovali např. na tabuli, dalo by se s výsledky a s celými úlohami ještě pracovat.

1000 : 2 = 500
1000 : 3 = 333 (1)
1000 : 4 = 250
1000 : 5 = 200
1000 : 6 = 166 (4)
1000 : 7 = 142 (6)
1000 : 8 = 125
1000 : 9 = 111 (1)

Např. se můžeme žáků ptát, co všechno mohou vyčíst z tohoto zápisu

- když se zvětšuje dělitel, podíl se zmenšuje
- kolik výsledků vyjde beze zbytku
- podíly se postupně zmenšují o menší čísla

Příloha 28 - Úloha typu "mnohé počítání k vyššímu cíli", Fraus/U/III/s. 95

5 Alexej tvrdí, že úloha na dělení se zbytkem ☐ : ☐ = 3 (1) má čtyři různá řešení.
Má pravdu?

Obrázek 66 - Fraus/U/III/s. 95

Sledujeme zde 3 didaktické cíle:

1) hlubší vhled žáka do dělení se zbytkem (žáci najdou více řešení)

Žáci by měli řešení evidovat na tabuli a našli by i více než 4 řešení. Mohli by najít i pravidlo, které v tomto případě funguje. Dělenec se zvyšuje o 3 a dělitel o 1.

7 : 2 = 3 (1)	10 : 3 = 3 (1)	13 : 4 = 3 (1)	16 : 5 = 3 (1)
19 : 6 = 3 (1)	22 : 7 = 3 (1)	25 : 8 = 3 (1)	28 : 9 = 3 (1)

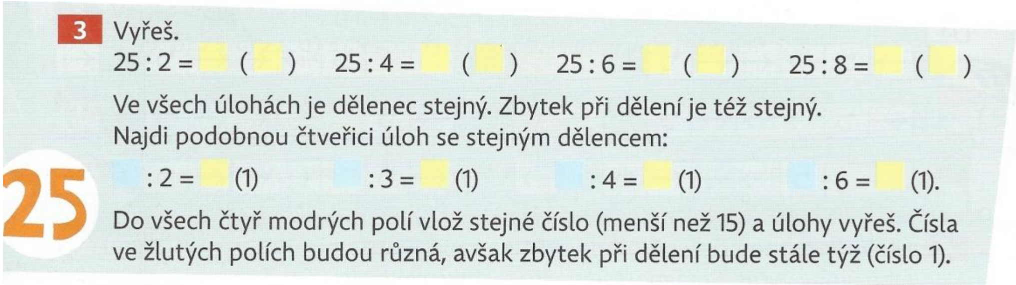
2) dát žákům možnost najít taková řešení úlohy, která zasahují do dělení dvoumístným číslem – neukazovat na tabuli, ale pochválit žáky v lavici

31 : 10 = 3 (1)	34 : 11 = 3 (1)	37 : 12 = 3 (1)	40 : 13 = 3 (1)

3) upřesňování jazyka matematiky – „úloha má 4 řešení“ znamená, že úloha má aspoň 4 řešení

Metodická příručka pro učitele upozorňuje na to, že jazyk, kterým běžně mluvíme, neodpovídá zcela přesně matematickému jazyku. Naše vnímání výroku „úloha má 4 řešení“ by odpovídala i odpověď většiny žáků, že Alexej nemá pravdu, protože úloha má více než 4 řešení. Matematicky však Alexej pravdu má, protože úloha má aspoň 4 řešení. Vysvětlení této problematiky je v metodické příručce na příkladu počtu noh u psa. To je pro představu mnohem konkrétnější.

Příloha 29 - Úloha typu "mnohé počítání k vyššímu cíli", Fraus/U/III/s. 96



Obrázek 67 - Fraus/U/III/s. 96

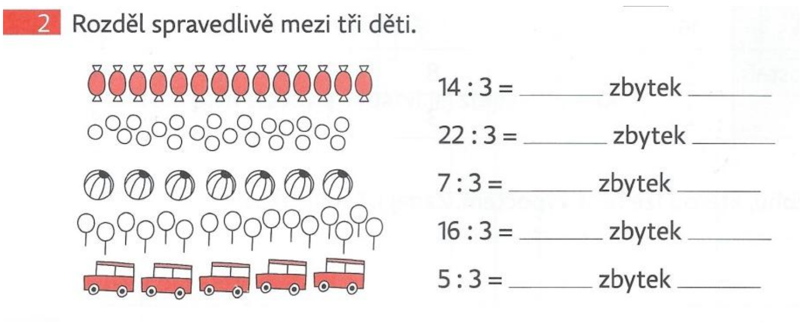
1. část – zbytek je všude stejný – pro slabší žáky doporučená manipulace

Hned u první úlohy vidíme přesah mimo obor malé násobilky, protože 25 : 2 = 12 (1). Ve všech případech je stejný dělenec a zbytek. Stejně jako v jiných učebnicích zde máme situaci, kdy známe dělence, dělitele a zjišťujeme neúplný podíl a zbytek. Co je pro jiné učebnice nezvyklé, je to, že úlohy jsou záměrně vybrány a poskládány tak, aby v nich nešlo pouze o jednu matematickou operaci, ale aby žáci hledali ještě něco víc. V tomto případě si všímají, že dělenec i zbytek jsou ve všech případech stejná čísla.

2. část – experimentální hledání čísla, které při dělení 2, 3, 4, 6 bude mít zbytek 1

Experimentální hledání čísla navazuje na první polovinu úlohy, kdy žáci řešili zadané úlohy a všímali si stejných dělenců a zbytků. Nyní je jejich úkolem najít takového dělence, který bude splňovat předepsané podmínky. Dělenec má být číslo menší než 15. I tato úloha je vhodná pro skupinovou práci, kdy si žáci rozdělí jednotlivé dělence a hledají a prověřují číslo, které by vyhovovalo daným podmínkám.

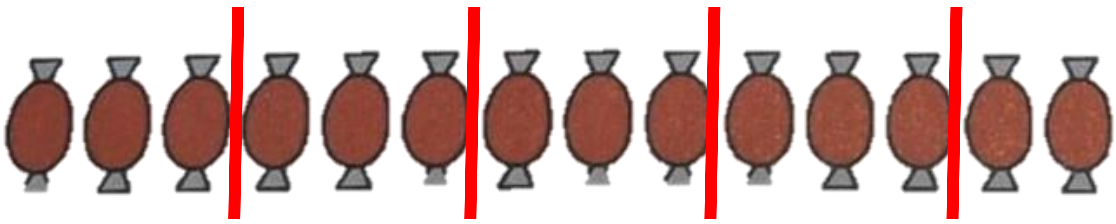
Příloha 30 - Úloha s grafickým znázorněním, Fraus/PS/2. díl/s. 35



Obrázek 68 - Fraus/PS/2. díl/s. 35-1

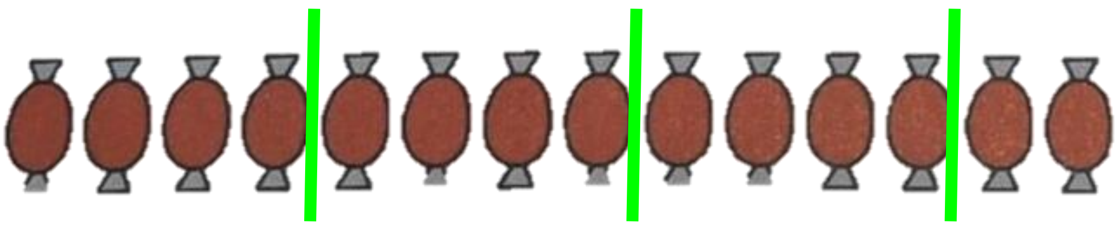
Znázorňování je pro žáky velmi důležité, získávají tak konkrétní představu o tom, co počítají. I když tato úloha by se měla řešit spíše formou přiřazování a pro tuto metodu zde není moc místa. Hned u první úlohy s bonbóny. Mají se spravedlivě rozdělit mezi 3 děti. Numericky je úloha zapsána 14 : 3 = 4 (2). Znamená to, že každé dítě dostane 4 bonbóny a 2 zbudou.

Grafické řešení by mohlo vypadat takto. 14 bonbónů budeme dělit do skupin po 3. Vyjdou nám 4 skupiny, 2 bonbóny zbudou, to vše vidíme graficky.



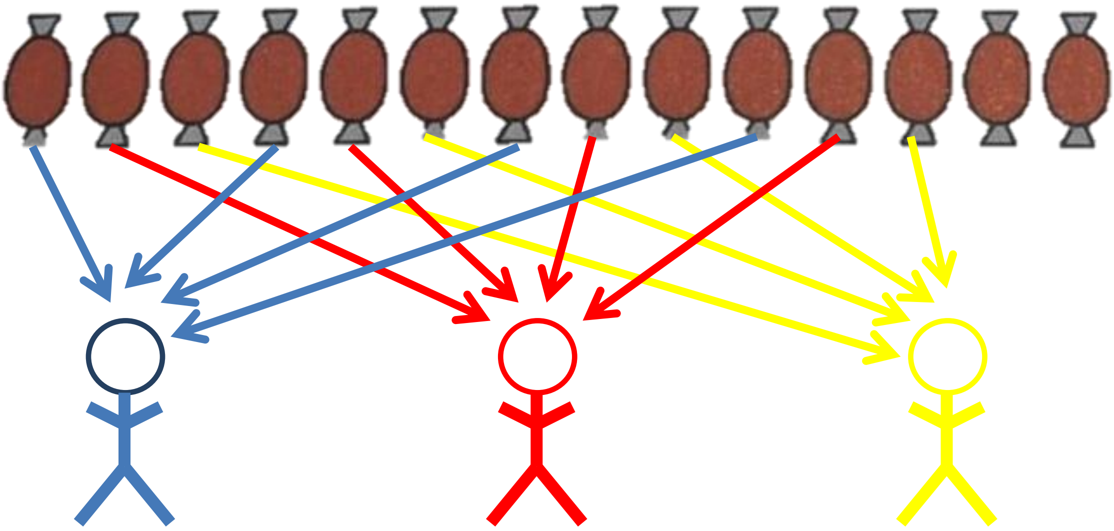
Obrázek 69 - Fraus/PS/2. díl/s. 35-2

Ale úloha po nás chce, abychom bonbóny rozdělili spravedlivě mezi 3 děti, a z grafického naznačení spíš plyne, že podělíme 4 děti a každé z nich dostane 3 bonbóny. Aby grafické řešení korespondovalo s porozuměním zadání, mělo by řešení vypadat takto:



Obrázek 70 - Fraus/PS/2. díl/s. 35-3

Ale toto řešení na začátku nevidíme, protože nevíme, že máme dělat skupinky po 4. Proto by bylo lepší, aspoň pro začátek, nakreslit pod skupinu objektů – v tomto případě bonbónů 3 postavičky, které by symbolizovaly děti, a žáci by bonbóny jednoduše přiřazovali. Ale to by bylo v rozporu se základní myšlenkou matematiky podle Hejného, kdy si žáci mají na svůj způsob řešení přijít sami. Kdybychom nakreslili 3 postavičky, předkládali bychom žákům způsob, jakým by měli úlohu řešit. Možná by tedy stačilo vynechat mezi jednotlivými řádky zadání více místa, aby žáci mohli sami volit tuto metodu přiřazování.



Obrázek 71 - Fraus/PS/2. díl/s. 35-4

Na tomto znázornění je jasně vidět, že každé dítě dostane 4 bonbóny a 2 bonbóny zbudou.

Příloha 31 - Slovní úloha, Fraus/III/ PS/2. díl/s. 36

Vytvoř slovní úlohu, kterou lze řešit výpočtem. Zadej ji spolužákovi.

a) 9 : 4

b) 13 : 3

Žáci mají vytvářet vlastní slovní úlohy k zadaným výpočtům. Možná to pro některé bude složité, protože v učebnici ani v pracovním sešitě se zatím nesetkali s inspirací v podobě slovních úloh, které by se zabývaly právě problematikou dělení se zbytkem. Na druhou stranu jejich slovní úlohy, pokud vymyslí, budou daleko originálnější a nebudou kopírovat nějaké vzory. Pro to, aby žák formuloval slovní úlohu, by měl rozumět vztahům mezi jednotlivými čísly v rámci dělení se zbytkem. Správně zformulovaná úloha může být i měřítkem zvládnutí porozumění.

Příloha 32 - Úloha typu "mnohé počítání k vyššímu cíli", Fraus/U/IV/s. 17, 18, 19

50 Přepiš do sešitu a doplň chybějící čísla. Které úlohy mají více řešení?

13 : 8 = __ (__)	17 : 2 = __ (__)	15 : __ = 3 (__)	__ : 6 = __ (1)
17 : 5 = __ (__)	30 : 4 = __ (__)	29 : __ = 4 (__)	__ : 6 = __ (2)
19 : 4 = __ (__)	48 : 5 = __ (__)	41 : __ = 5 (__)	__ : 6 = __ (3)
21 : 3 = __ (__)	25 : 3 = __ (__)	25 : __ = 4 (__)	__ : 6 = __ (4)

Obrázek 72 - Fraus/U/IV/s. 17

První opakování ve 4. ročníku, hledání více řešení.

1. + 2. sloupeček: 1 řešení

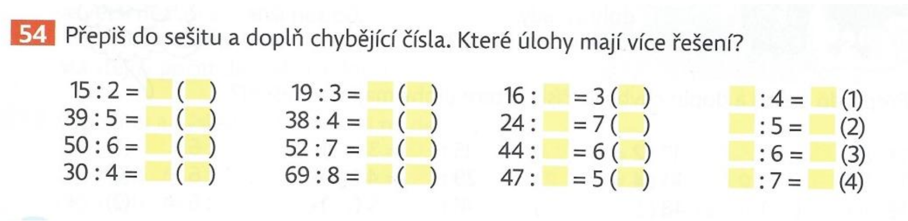
3. sloupeček: Může být zbytek 0? Může být zbytek větší než dělitel? Právě tyto otázky mohou vyvstat i vzhledem k tomu, že je to první opakování dělení se zbytkem po prázdninách.

4. sloupeček: žáci by měli formulovat – jestliže zvýšíme dělenec o jedna, zvýší se o jedna i zbytek. Žáci mohou najít daleko více řešení.

7 : 6 = 1 (1)	13 : 6 = 2 (1)	19 : 6 = 3 (1)	25 : 6 = 4 (1)
8 : 6 = 1 (2)	14 : 6 = 2 (2)	20 : 6 = 3 (2)	26 : 6 = 4 (2)
9 : 6 = 1 (3)	15 : 6 = 2 (3)	21 : 6 = 3 (3)	27 : 6 = 4 (3)
10 : 6 = 1 (4)	16 : 6 = 2 (4)	22 : 6 = 3 (4)	28 : 6 = 4 (4)

Zde je vidět, že bychom v řadách mohli pokračovat dál a 4. sloupeček bude mít nekonečně mnoho řešení.

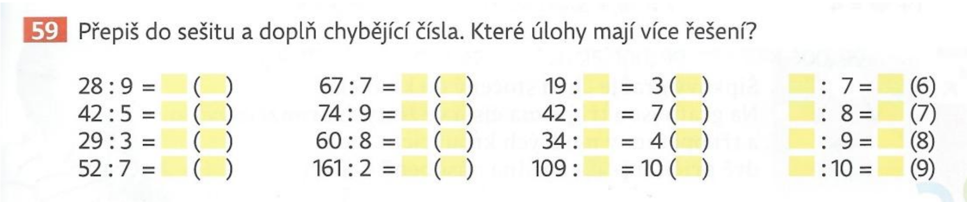
Přímo v zadání úlohy jsou žáci vyzváni k tomu, aby zjišťovali, které úlohy mají více řešení. Při hledání více řešení žáci často musí vyřešit ještě daleko více úloh, než je zadáno v učebnici, navíc se musí rozhodnout, zda další řešení vyhovuje podmínkám či ne. I když tedy na první pohled vypadá, že právě dělení se zbytkem se úlohy v učebnici nevěnují tolik intenzivně, pro vyřešení úlohy, je potřeba více počítání, než pouze automaticky podle naučeného algoritmu řešit jednu úlohu za druhou. Žáci se musí rozhodnout na základě zkušeností, které úlohy budou mít pouze jedno řešení a u kterých má význam hledat další řešení.



54 Přepiš do sešitu a doplň chybějící čísla. Které úlohy mají více řešení?

15 : 2 = ▢ (▢)	19 : 3 = ▢ (▢)	16 : ▢ = 3 (▢)	▢ : 4 = ▢ (1)
39 : 5 = ▢ (▢)	38 : 4 = ▢ (▢)	24 : ▢ = 7 (▢)	▢ : 5 = ▢ (2)
50 : 6 = ▢ (▢)	52 : 7 = ▢ (▢)	44 : ▢ = 6 (▢)	▢ : 6 = ▢ (3)
30 : 4 = ▢ (▢)	69 : 8 = ▢ (▢)	47 : ▢ = 5 (▢)	▢ : 7 = ▢ (4)

Obrázek 73 - Fraus/U/IV/s. 18



59 Přepiš do sešitu a doplň chybějící čísla. Které úlohy mají více řešení?

28 : 9 = ▢ (▢)	67 : 7 = ▢ (▢)	19 : ▢ = 3 (▢)	▢ : 7 = ▢ (6)
42 : 5 = ▢ (▢)	74 : 9 = ▢ (▢)	42 : ▢ = 7 (▢)	▢ : 8 = ▢ (7)
29 : 3 = ▢ (▢)	60 : 8 = ▢ (▢)	34 : ▢ = 4 (▢)	▢ : 9 = ▢ (8)
52 : 7 = ▢ (▢)	161 : 2 = ▢ (▢)	109 : ▢ = 10 (▢)	▢ : 10 = ▢ (9)

Obrázek 74 - Fraus/U/IV/s. 19

Opět navazuje na 2 cvičení z předchozích stran. První dva sloupečky mají vždy jen jedno řešení, 3. sloupeček má více řešení a poslední sloupeček má opět nekonečně mnoho řešení. Během těchto 3 cvičení je vidět jasná gradace obtížnosti. Jsou zde volena vyšší čísla, dokonce v úloze 161 : 2 = _ (_) a 109 : _ = 10 (_) se dostáváme mimo obor malé násobilky. A žáci řeší tyto úlohy pomocí vlastních postupů. Ve 4. sloupečku spočívá gradace v tom, že se zvýšily hodnoty dělence a zbytku. Princip řešení úlohy je totožný jako v předchozích cvičeních. Také žáci, kteří třeba nepostřehli, jak řešit úlohy, které mají více řešení, mají šanci zkoušet své postupy znovu.

Příloha 33 - Úloha typu "mnohé počítání k vyššímu cíli", Fraus/U/IV/s. 36

2 Najdi dvě po sobě jdoucí čísla, jejichž součet je dělitelný číslem 7 beze zbytku.
(Taková jsou například čísla 17 a 18, neboť 17 + 18 = 35 a 35 : 7 = 5 (0).)
Hledej více řešení. Hledej co největší řešení.

Obrázek 75 - Fraus/U/IV/s. 36

Úloha, která není primárně zaměřena na dělení se zbytkem, ale při jejím řešení se žáci s dělením se zbytkem setkají. Žáci mohou volit různé strategie řešení např.: metodu pokusu a omylu, zde je velká pravděpodobnost dělení se zbytkem. Pokud budou žáci používat tuto metodu a budou se snažit najít co největší řešení, budou muset potom písemně dělit. Mohou tak dělit i třeba čtyřmístná čísla.

Dalším možným postupem je sčítání po sobě jdoucích čísel a jejich výsledek dělit 7. Práve při tomto postupu řešení se žáci setkají s dělením se zbytkem.

	0 + 1 = 1	1 : 7 = 0 (1)
	1 + 2 = 3	3 : 7 = 0 (3)
	2 + 3 = 5	5 : 7 = 0 (5)
	3 + 4 = 7	7 : 7 = 1
	4 + 5 = 9	9 : 7 = 1 (2)
	5 + 6 = 11	11 : 7 = 1 (4)
+ 7	6 + 7 = 13	13 : 7 = 1 (6)
	7 + 8 = 15	15 : 7 = 2 (1)
	8 + 9 = 17	17 : 7 = 2 (3)
	9 + 10 = 19	19 : 7 = 2 (5)
	10 + 11 = 21	21 : 7 = 3
	…	
+ 7	16 + 17 = 33	33 : 7 = 4 (5)
	17 + 18 = 35	33 : 7 = 5

Žáci mohou objevit pravidelnost – musí najít jedno řešení, které platí, vezmou prvního sčítance a přičtou k němu číslo 7, to samé udělají i s druhým sčítancem, sečtou a mají další výsledek, který je dělitelný 7 beze zbytku.

Zde je příklad této pravidelné řady:

3 + 4 = 7	7 : 7 = 1
10 + 11 = 21	21 : 7 = 3
17 + 18 = 35	35 : 7 = 5
24 + 25 = 49	49 : 7 = 7
31 + 32 = 63	63 : 7 = 9
38 + 39 = 77	77 : 7 = 11
…	

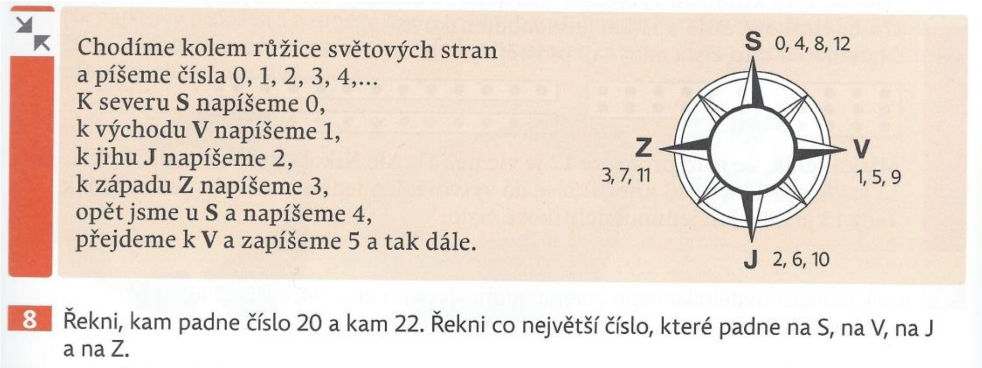
Tímto způsobem bychom mohli najít nekonečně mnoho řešení.

Další řešitelskou strategií může být vypsání násobků 7 a hledání dvojic po sobě jdoucích čísel.

7	3 + 4
14	nejde
21	10 + 11
28	nejde
35	17 + 18
42	nejde
49	24 + 25
56	nejde
63	31 + 32
70	nejde
77	38 + 39
…	

Tímto způsobem bychom mohli najít nekonečně mnoho řešení

Příloha 34 - Úloha typu "mnohé počítání k vyššímu cíli", Fraus/U/IV/s. 74



Chodíme kolem růžice světových stran
a píšeme čísla 0, 1, 2, 3, 4,...
K severu **S** napíšeme 0,
k východu **V** napíšeme 1,
k jihu **J** napíšeme 2,
k západu **Z** napíšeme 3,
opět jsme u **S** a napíšeme 4,
přejdeme k **V** a zapíšeme 5 a tak dále.

8 Řekni, kam padne číslo 20 a kam 22. Řekni co největší číslo, které padne na S, na V, na J a na Z.

Obrázek 76 - Fraus/U/IV/s. 74

Úloha navazuje na třídění do skupin B0, B1, B2 a B3. Sever je vizualizací skupiny B0, východ B1, jih B2 a západ B3. Jakmile žáci objeví systém postupného zápisu čísel podle velikosti zbytku, snadno vyřeší, kde budou čísla 20 (sever), 22 (jih). Potom se budou předhánět, kdo správně umístí ke světové straně co nejvyšší číslo. A při tom budou dělit číslem 4 a zařadí dle zbytku ke světové straně. Nelze určit úplně nejvyšší číslo, ale v rámci třídy se mohou pokusit správně určit co nejvyšší číslo, které zvládnou. Pro děti je to velká motivace, rády řeší úlohy s vysokými čísly, překonávají samy sebe, a když se jim podaří nalézt řešení, mají z toho radost a o to víc, pokud se jedná právě o vysoká čísla.

Příloha 35 - Slovní úloha, Fraus/PS/IV/2. díl/s. 44

11 Skupina dětí se chtěla povozit na lodičkách. Když se děti rozdělily po třech do každé lodičky, jedno dítě zbylo. Když se rozdělily po čtyřech, též jedno zbylo. Stejně tak v případě, že se rozdělily po šesti. Když se ale rozdělily po pěti, vyšlo to akorát. Kolik dětí bylo ve skupince?

Obrázek 77 - Fraus/PS/IV/2. díl/s. 44

Slovní úloha, kde se v zadání vyskytuje výsledek, který bychom získali při dělení se zbytkem. Konkrétně _ : 3 = _ (1), _ : 4 = _ (1), _ : 6 = _ (1) a _ : 5 = _ (0) a úkolem je zjistit dělence, který by vyhovoval pro všechny tyto úlohy. Je řada možností, jak úlohu řešit. Jedním ze způsobů je najít společný násobek čísel 3, 4 a 6, který bude o 1 menší než číslo dělitelné 5. Této podmínce vyhovuje číslo 24. Proto číslo, které hledáme, bude 25. Dalším způsobem řešení může být např. metoda pokusu a omylu. Tuto úlohu vymysleli žáci a nutno dodat, že nápad i její formulace jsou velmi zdařilé. Dalo by se říct, že svým zadáním vybočuje ze standartních úloh, které se věnují problematice dělení se zbytkem.

Příloha 36 - Netradiční úloha, Fraus/U/V/s. 43

Obrázek 78 - Fraus/U/V/s. 43

I s prostředím Neposedů se setkáme jen v učebnicích M. Hejného. Právě doplňování určených čísel může být pomocnou „berličkou“ pro některé žáky, kteří mají problém s hledáním řešení. Díky tomu, že mají omezený počet možností, mohou zažívat radost z úspěchu, když se jim podaří čísla správně dosadit. Zároveň s každou zvládnutou úlohou se zdokonalují v řešení problému. Pokud si uvědomí, že zbytek nemůže být stejný nebo větší než dělitel, ušetří si práci.